А. Н. Комаров

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальный практический курс

Москва
2013

УДК 51-3
ББК 22.1я72
К63

Комаров А. Н.
К63 Основы математики. — М. 2013. — 632 с.
ISBN

Эта книга — учебник для изучавших, недоучившихся и изучающих математику.

Эта книга написана для тех, кто всерьёз хочет изучить математику, но у кого предыдущие попытки закончились неудачно.

Это — практическая попытка создать оптимальный учебник, гарантирующий достижение более высокого результата по сравнению со многими существующими методиками и учебными пособиями. Достоинством данного учебника является несложный и логичный переход от одного явления к другому.

Зачем нам глубоко знать математику? Представьте себе, что произошли катаклизмы на Земле и все электрические сети вышли из строя, компьютеры и интернет не работают. Что же делать? Теперь нельзя ничего подсчитать, рассчитать и вычислить, наука не может развиваться, школьники не могут проверить сложные примеры и длинные вычисления. Например, как вычислить без калькулятора или без компьютера 11^{12}; 101^{8}; $1{,}0017^{5}$; 100000001^{3}; $0{,}00101^{4}$; $1{,}01^{6}$; 111111^{4}? И что делать, если такие вычисления надо выполнять быстро и точно несколько часов подряд? Сейчас не только школьники не могут выполнять приведенные выше несложные примеры без калькулятора, но и многие инженеры будут долго пыхтеть, ошибаться и уставать выполняя их, а уж времени уйдет на это очень много. В одной из глав этой книги вы научитесь выполнять все эти действия и аналогичные им в уме, устно и быстро, вычисляя точные ответы без ошибок и легко. В чем секрет? В особых алгоритмах и методах. Стало интересно. Тогда вперед! Читайте, учитесь, развивайтесь!

Особое внимание в книге уделено тем часто используемым явлениям, которые по тем или иным причинам недостаточно полно и глубоко изложены в существующих учебных пособиях, а то и вовсе в них отсутствуют. Глубина представления многих тем соответствует уровню изучения материала в школах с углубленным изучением математики и на первых курсах технических ВУЗов. Учебник содержит все основные темы школьного курса математики, в упражнениях собрано значительное количество важных примеров. Основные задачи данного курса: снизить порог сложности объяснения и понимания материала и также повысить качество усвоения материала (как теории, так и практики).

Рецензент — Николай Стрекалов, кандидат физико-математических наук, выпускник механико-математического факультета МГУ.

ISBN

Оглавление

От рецензента 10
От автора 13
Психологическо-философское введение 26
История и арифметики также 40

I Теория множеств **63**

Глава 1. Теория множеств **64**
1.1 Общие понятия теории множеств. 64
1.1.1 Универсальное множество 68
1.1.2 Диаграммы Эйлера—Венна 69
1.1.3 Способы задания множеств 69
1.1.4 Подмножества 71
1.1.5 Свойство транзитивности для подмножеств 73
1.1.6 Свойство рефлексивности для подмножеств 74
1.2 Операции над множествами 75
1.2.1 Мощность множеств 75
1.2.2 Равенство множеств 76
1.2.3 Операции над множествами 76
1.2.4 Пересечение множеств 77
1.2.5 Объединение множеств 79
1.2.6 Разбиение множеств 80
1.2.7 Разность множеств 81
1.2.8 Абсолютное дополнение 82
1.2.9 Симметрическая разность множеств 83
1.2.10 Приоритеты операций 84
1.3 Экзамен по теме «Множества» 85

II Арифметика **88**

Глава 2. Основы математики. Арифметика **89**
2.1 Математический тест на арифметические операции 89
2.2 О математической символике 91
2.3 Ряд натуральных чисел 92
2.4 Римские цифры 96

Глава 3. Натуральные числа и действия над ними **100**
3.1 Натуральные числа и нуль 100
3.2 Сравнение натуральных чисел 101
3.3 Операции над числами 103
3.3.1 Сложение 103
3.3.2 Умножение 110
3.3.3 Вычитание 116
3.3.4 Вынесение общего множителя за скобки 120
3.3.5 Деление. Некоторые признаки делимости 122
3.4 Различные варианты представления чисел 129
3.5 Проверка арифметических операций 131
3.6 Возведение натуральных чисел в степень с натуральным показателем 132
3.7 Простые и составные числа 133
3.8 Множества чисел и их краткая характеристика 134
3.9 Числовые выражения 137
3.10 Разложение натурального числа по разрядам 138

Глава 4. Целые числа **141**
4.1 Отрицательные числа 141
4.2 Операции с целыми числами 142
4.2.1 Модуль 142
4.2.2 Сложение и вычитание 143
4.2.3 Умножение и деление 144
4.2.4 Приоритет операций 146
4.3 Числовые выражения и скобки 147
4.3.1 Смена знаков перед членами в скобках 148
4.3.2 Раскрытие скобок 149
4.4 Числовые равенства 151
4.4.1 Свойства числовых равенств 151
4.4.2 Буквенные выражения 152

III Алгебра **154**

Глава 5. Уравнение **155**
5.1 Одночлен 156
5.2 Приведение подобных членов. 157
5.3 Многочлен 160
5.4 Решение уравнений с одной переменной 161
5.5 Символическая запись элементарных преобразований равенств 166

Глава 6. Решение неравенств **167**
6.1 Неравенства 167
6.2 Свойства числовых неравенств 169
6.3 Решение простейших неравенств 171
6.4 Элементарные преобразования неравенств 173

Глава 7. Об элементарной и высшей математике **177**
7.1 Постоянная и переменная величины 178
7.2 Функциональная зависимость между переменными величинами 182
7.3 Виды функций 185
7.4 Характеристика особых точек и интервалов изменения аргумента 187
7.5 Свободный член в линейном уравнении 188
7.6 Угловой коэффициент в линейном уравнении 189
7.7 Параллельный перенос прямой вдоль оси ординат и оси абсцисс 190

Глава 8. Основная теорема арифметики. НОД и НОК. Делимость **192**
8.1 Кратность чисел 192
8.2 Основная теорема арифметики 196
8.3 Делимость чисел. Девять простых свойств. 198
8.4 Сравнение множества делителей 200
8.5 Свойства НОК и НОД двух натуральных чисел. 204
8.6 Деление с остатком и недостатком 206
8.7 Признаки делимости 208

Глава 9. Обыкновенные дроби **212**
9.1 Числовая ось. Упорядочение чисел 212
9.2 Деление единичного отрезка на две равные части 215
9.3 Дробные числа 217
9.4 Деление единичного отрезка на три равные части 220
9.5 Деление отрезка на равные части. Рациональные числа . . . 222
9.6 Обыкновенные дроби и действия над ними 224
9.7 Сравнение обыкновенных дробей. Пропорция 226
9.8 Перевод неправильной дроби в смешанную и наоборот 228
9.9 Тождественные преобразования дробей 229
9.10 Сложение или вычитание дробей 230
9.11 Умножение обыкновенных дробей 232
9.12 Проценты 234
9.13 Операция деления над обыкновенными дробями 235
9.14 Многоступенчатые (сложные / двойные) дроби 237
9.15 Пропорции 238
9.16 Элементарные преобразования пропорций 243
9.17 Решение неравенств 243

Глава 10. Степени **245**
10.1 Общие определения 245
10.2 10 элементарных преобразований степенных выражений . . . 248
10.3 Старшинство операций умножения, деления, возведения в степень 259
10.4 Одновременное использование дробных и степенных выражений. 261

Глава 11. Операции над многочленами **264**
11.1 Умножение одночлена на многочлен. 264
11.2 Умножение многочлена на многочлен 265
11.3 Деление одночлена на одночлен 266
11.4 Деление многочлена на одночлен 267
11.5 Деление многочлена на многочлен 268

Глава 12. Десятичные дроби и действия над ними **270**
12.1 Изображение числа в десятичной системе счисления 270
12.2 Виды десятичных дробей 272
12.3 Рациональное число 274
12.4 Разрядная сеть для десятичных дробей 275
12.5 Сравнение десятичных дробей 280
12.6 Представление обыкновенной дроби в форме десятичной дроби 280
12.7 Представление десятичной дроби в форме обыкновенной дроби 282
12.8 Арифметические операции над десятичными дробями 288
12.8.1 Сложение десятичных дробей. 288
12.8.2 Вычитание десятичных дробей 294
12.8.3 Умножение десятичных дробей 296
12.8.4 Деление десятичных дробей 298

Глава 13. Системы счисления отличные от десятичной **304**
13.1 Двоичная система счисления 304

Глава 14. Неравенства **309**
14.1 Изображение неравенств на числовой оси 310
14.2 Примеры раскрытия модуля 312
14.3 Решение уравнений с модулями 314

Глава 15. Операции с рядами **320**
15.1 Последовательности. Прогрессии 320
15.2 Операции над натуральным рядом чисел 322
15.3 Умножение натурального ряда на произвольное натуральное число 323

15.4 Сравнимость по модулю 324
15.5 Формула общего члена натурального ряда 326
15.6 Выделение простых чисел из членов натурального ряда . . . 327

Глава 16. Радикалы 328
16.1 О математической символике 328
16.2 Степени, радикалы и логарифмы. 329
16.3 Методы преобразования радикалов 331
16.4 Элементарные преобразования радикалов в поле действительных чисел. 333
16.5 Извлечение корня из дробного выражения 344
16.6 Сложный многоступенчатый радикал. 351
16.7 Сумма и разность радикалов 354
16.8 Различные операции с радикалами 355
16.9 Вынесение и внесение множителя за знак радикала и под знак радикала 356
16.10 Преобразования алгебраических радикалов. 361

Глава 17. Рациональные и иррациональные числа 367
17.1 Рациональные числа 367
17.2 Иррациональные числа 368

Глава 18. Формулы сокращенного умножения 370
18.1 Произведение суммы двух чисел на их разность. 370
18.2 Квадрат суммы двух чисел. 371
18.3 Квадрат разности двух чисел. 372
18.4 Куб суммы двух чисел. 373
18.5 Куб разности двух чисел. 374
18.6 Сумма кубов двух чисел. 375
18.7 Разность кубов двух чисел. 376

Глава 19. Приближенное вычисление корней 377
19.1 Вычисление приближенных значений квадратных корней . . 377
19.2 Вычисление приближенных значений корней степени 3 и выше 382

Глава 20. Непрерывные (цепные) дроби и действия над ними 384
20.1 Виды непрерывных дробей и их символические записи 384
20.2 Развёртка 386
20.3 Арифметические операции над цепными дробями 387
20.4 Свёртка 390
20.5 Цепные дроби для взаимно обратных дробей 393
20.6 Уравнения с непрерывными дробями 394

20.7 Приближённое представление непрерывной дроби подходящими дробями 396
20.8 Нахождение приближенных значений квадратных корней . . 402
20.9 Прикладные задачи и их решение методом развёртки в непрерывные дроби 405
20.9.1 Задача на сокращение обыкновенной дроби 405
20.9.2 Задача на разрезание прямоугольника 407
20.9.3 Конструкторская задача 408
20.10 Непрерывные дроби и линейные диофантовы уравнения в целых числах 410

Глава 21. Быстрый метод точных устных вычислений 413
21.1 Обоснование необходимости метода 413
21.2 Типовые задачи решаемые методом быстрых устных вычислений 413
21.3 Устное умножение чисел — теория и метод 414
21.4 Алгоритм быстрого умножения 423
21.5 Возведение в степень числа 11. 424
21.6 Вычисление степеней у нецелых чисел 427
21.7 Бином Ньютона 429
21.8 Модифицированные арийские треугольники 430

Глава 22. Квадратные уравнения 434
22.1 Полные и неполные квадратные уравнения 434
22.2 Общая формула корней квадратного уравнения 437
22.3 Частные случаи общей формулы для корней квадратного уравнения 438
22.4 Свойства корней квадратного уравнения 439
22.5 Разложение квадратного трехчлена на линейные множители 442
22.6 Биквадратное уравнение 443

Глава 23. Преобразование радикалов 445
23.1 Формула преобразования радикала из суммы внутренних радикалов 445
23.2 Преобразования радикалов по схемам разложения на множители 447
23.3 Символическая запись элементарных преобразований радикалов 451

Глава 24. Конкурсная задача 453
24.1 Условие задачи 453
24.2 Решение задачи 453

Глава 25. Введение в комбинаторику **463**
25.1 Разделы комбинаторики 464
25.2 Задачи 465
25.3 Комбинаторные принципы сложения и умножения 466
25.4 Перестановки, размещения и сочетания 473
25.5 Обобщенные перестановки и сочетания 480
25.6 Размещения и сочетания с повторениями 483
25.7 Бином Ньютона. Полиномиальная формула 487
25.8 Подсчёт числа отображений и подмножеств 487

Глава 26. Логарифмы **489**
26.1 Основное логарифмическое тождество 491
26.2 Свойства логарифиов 492
26.3 Логарифмирование по разным основаниям 495
26.4 Логарифмические уравнения 495

Глава 27. Тригонометрия **497**
27.1 Основные понятия для тригонометрических построений . . . 497
27.1.1 Задание прямоугольной системы координат 497
27.1.2 Геометрические и тригонометрические углы 499
27.1.3 Представление тригонометрического угла на единичной окружности 501
27.1.4 Измерение тригонометрических углов 501
27.1.5 Определения первичных тригонометрических функций 505
27.2 Основные тригонометрические построения 509
27.2.1 Четыре основные тригонометрические функции 509
27.2.2 Геометрическое описание основных функций 512
27.2.3 Тригонометрические построения и формулы приведения 520
27.2.4 Значения тригонометрических функций от специальных углов 528
27.2.5 Решение уравнений 531
27.2.6 Решение неравенств 533
27.3 Различные тригонометрические тождества 536
27.3.1 Тригонометрические функции от суммы и разности углов 539
27.3.2 Формулы для двойного и половинного угла 545
27.3.3 Произведение тригонометрических функций 551
27.3.4 Сумма и разность тригонометрических функций 552
27.3.5 Упрощение тригонометрических выражений 556

Ответы 565

От рецензента

Математика (от др.-греч. — изучение, наука) — наука о структурах, порядке и отношениях, которая исторически сложилась на основе операций подсчёта, измерения и описания форм реальных объектов. Математика — фундаментальная наука, предоставляющая (общие) языковые средства другим наукам; тем самым она выявляет их структурную взаимосвязь и способствует нахождению самых общих законов природы.

Современная математика играет важную роль в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях и расчетах. Без хорошего знания математики невозможна профессиональная деятельность в области компьютерных и информационных технологий. Математика стала для многих отраслей знаний и техники не только орудием количественного расчета, но и методом точных исследований и средством предельно четкой и однозначной формулировки понятий, проблем и свойств объектов мира. Математика является уникальным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки и технологии и уже обязательным и необходимым элементом современной культуры для каждого образованного человека, в какой бы области он не планировал работать.

Что же такого необычного в математике? Чем она выделяется от других наук? Математики заменили длинные словесные описания на короткие, понятные формулы. Математические объекты создаются путём идеализации свойств реальных или других математических объектов и записи этих свойств на формальном языке. И если вы можете сформулировать вопрос или решение, затем записать это с помощью математических обозначений, и затем решить все это, то вы можете решать любые по сложности задачи вашей жизни в любых областях знаний.

Если вы хотите изучить математику самостоятельно, не имея возможности позволить себе значительные траты на хорошего преподавателя, но имея желание достаточно хорошо знать её, уметь использовать в практике жизни или для подготовки к поступлению в ВУЗ, Вам необходимо обратиться к учебнику новатора в области эффективного преподавания А. Н. Комарова. Как правило, самоучитель — учебник для обучения чему-нибудь без помощи руководителя — даёт незначительные, практически, начальные знания, и не может научить на профессиональном уровне. Учебник и одновременно самоучитель А. Комарова, может, и в этом его важнейшая особенность и неоспоримое преимущество. Кроме того, обучить профессионально базовым практическим основам математики — основная задача этого методического пособия. Такая возможность самоучителя достигается применением в нем разработанной автором во многом уникальной методики обучения.

Учебником можно пользоваться и при обучении под руководством учителя или родители могут помочь своим детям. Материал в учебнике представлен как единое целое своих составляющих компонентов (теории, примеров с разбором и комментариями и задач с ответами) в соответствии с научным подходом к концепции эффективного обучения. Среди особенностей самоучителя, обеспечивающих выполнение основной задачи — обучить профессионально, важно отметить следующие.

1) Качественный подбор и систематизация материала для осознанного изучения основных, базовых математических явлений как основы владения математикой.

2) Возможность закрепления требуемых объёмов с помощью упражнений и задач, вводимых постепенно и по частотному принципу (частота встречаемости явления и сложности).

3) Целевая иерархичность (соблюдение логических уровней) и последовательность в подаче средств и видов деятельности при обучении на каждом этапе по принципу «от простого к сложному».

4) Одновременно используются принцип частотности и принцип плавного возрастания сложности, а также логическая связь между блоками учебного материала.

5) Применяется разработанная автором система упражнений, позволяющая активно усвоить и воспроизводить подсознательно с большой скоростью огромное число логических информационных единиц. Только в первом томе около 670 задач.

6) Учебник имеет сугубо практическую направленность, теория дается строго, но в минимальном объеме.

Практика показывает, что организация учебного материала в блоки, имеющие некие логические связи, позволяет усваивать и запоминать такой материал на много (более, чем в 10 раз по данным психологов) легче, чем при традиционном обучении. Что значит логические блоки? Например, для качественного усвоения десятичных дробей, предварительно необходимо усвоить такие темы: обыкновенные дроби, пропорции, степени с натуральным показателем, решение линейных уравнений. А такая последовательность подачи тем математики отсутствует практически во всех учебниках, этим и объясняется полное непонимание глубинных связей между объектами математики и их свойствами у большинства учеников школ.

Процесс тестирования, введённый в конце каждого блока, закрепляет изученный материал. Результаты тестирования можно сверить с ответами, помещёнными в конце самоучителя. Практическое преподавание показывает, что никакой метод обучения не может быть эффективным без заинтересованности обучаемого. Обычно, если материал слишком прост, к нему теряется интерес, если слишком труден, теряется вера в возможность усвоения такого материала. В учебнике, с учетом этого, материал в главах собран в блоки, позволяющие усваивать их с индивидуальной скоростью; если, к примеру, блок не сложен и вы уже знаете этот материал, то он может быть просто пропущен без ущерба для всего процесса обучения. Конечный этап обучения — это набор доведенных до автоматизма практических навыков, определяющих умение применять полученные знания в жизни. Кроме того, в самоучителе А. Комарова предлагается своеобразная форма обучения, включенная методически в последовательность тем и заданий.

Сегодняшнее поколение — первое, которое растет с пеленок в цифровой среде и без глубокого знания самих цифровых основ этого мира, в которых математика — базис, невозможно осознанно жить в этом цифровом мире не подпадая под влияния, самостоятельно принимая осознанные верные решения.

Созданный на научной основе эффективный учебник-самоучитель, который позволяет изучать математику, изначально ориентируясь на её дальнейшее профессиональное применение, предназначен для школьников, студентов и взрослых, впервые

приступающих к изучению математики или имеющих некоторую подготовку в интервале уровней «начинающие» — «продолжающие» (с 1-го по 10-й классы, причем, с 6-го по 10-й классы школ с углубленным изучением математики). Это учебник, который действительно учит! Предназначенный для глубокого начального изучения арифметики, алгебры, теории множеств и логики с самых основ, самоучитель презентует авторскую логико-алгоритмическую концепцию обучения, что выражается в использовании новых, отличных от стереотипных, схем классификации явлений, в дробно-ступенчатой подаче учебного материала, а также в итерационных алгоритмах прохождения тем.

к. ф.-м. н. Николай Стрекалов

От автора

«Математика есть лучшее и даже единственное введение в изучение природы.»
Д. И. Писарев

Эта книга написана для тех, кто всерьёз хочет изучить математику, или у кого предыдущие попытки закончились неудачно: не повезло с учителем, или неудачный учебник, или и то, и другое. Зачем нам глубоко знать математику? Представьте себе, что произошли катаклизмы на Земле и все электрические сети вышли из строя, компьютеры и интернет не работают. Батарейки закончатся быстро. Что же делать? В такой ситуации нельзя ничего рассчитать и вычислить, наука не может развиваться, школьники не могут проверить сложные примеры и длинные вычисления. Например, как тогда вычислить 11^9; 101^8; $1{,}0017^5$; $0{,}00101^4$; $1{,}01^6$; 111111^4; $\sqrt[3]{23}$; как сократить дробь: $\frac{2147}{1577}$; как решить уравнение: $2147x + 1577y = 3591$? И что делать, если много таких вычислений надо выполнять быстро и точно несколько часов подряд? Сейчас не только школьники не могут выполнять приведенные выше несложные примеры без калькулятора, но и многие инженеры будут долго думать, часто и ошибаться и времени у них уйдет на это много. В одной из глав этой книги вы научитесь выполнять все эти действия и аналогичные им в уме устно или на бумаге, но достаточно быстро, вычисляя точные ответы без ошибок. В чем секрет? В особых алгоритмах и методах, которые, на самом деле, несложные — многие из них известны с давних времен, а часть из них придумал автор. Стало интересно? Тогда вперед! Читайте, учитесь, развивайтесь! Изучение математики оттачивает не только математические способности, но и вообще умственные, что дает вам возможность глубже понимать мир и находить в нем пути решения многих проблем.

Но можно ли самому, имея только учебник, научиться пользоваться математикой? Как вы убедитесь на примерах из жизни великих ученых и математиков в последующих главах, многие изучали математику и добивались успехов, применяя ее. И главное: кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует свою память, воспитывает в себе настойчивость и упорство в достижении цели, это серьезная подготовка к решению задач любой сложности на всю жизнь.

Этот учебник автор писал и обдумывал в течении многих лет, чтобы обычному человеку, ребенку или взрослому, без учителя, самостоятельно можно было действительно разгадать тайны математики, получить практическую фундаментальную подготовку, понять и усвоить основные понятия и тонкости на практике. Автор не стремился создать идеальный лучший учебник, это пока нереальная задача в рамках современной науки, но изложить материал так, чтобы у учащегося был твердый базис использования математики, с которого можно двигаться глубже и дальше — удалось (по отзывам учеников и их родителей).

Сердце математики — в конкретных примерах и конкретных задачах (в книге их 720), и с первой страницы именно их мы будем разбирать и решать. Для решения задач в первую очередь нужно понимание. Текст книги построен именно так, чтобы ученик понял, как это явление работает. Уже многие люди разного возраста и способностей прошли по пути, проложенному данной методикой и этой книгой и они зовут тебя в дорогу...

Автор стремился создать оптимальный учебник и самоучитель, гарантирующий достижение более высокого результата по сравнению со многими существующими методиками и учебными пособиями, сочетающий строгость теоретического изложения, но краткость и учитывая потребности практического применения полученных знаний и навыков. Одним из основных достоинств данного учебника является несложный и логичный переход от одного явления к другому по принципу «от простого к более сложному». Большое количество специально подобранных упражнений для закрепления явлений. Большинство учеников, прошедших обучение по данному учебнику, отметили, что процесс усвоения объектов и явлений математики проходил значительно легче и быстрее, чем при использовании других учебных пособий.

Следует отметить тот немаловажный факт, что в данном учебнике особое внимание уделено тем часто используемым в практике явлениям, которые по тем или иным причинам недостаточно полно и глубоко изложены в существующих учебных пособиях, а то и вовсе в них отсутствуют.

Глубина представления многих тем соответствует уровню изучения материала в школах с углубленным изучением математики и на первых курсах институтов физико-математической специализации. Изложение сопровождается большим количеством примеров употребления, что значительно облегчает и ускоряет освоение материала. Большинство примеров подобрано так, чтобы их можно было использовать в практике решения задач в жизни.

Автор будет очень признателен всем, если вы будете присылать найденные опечатки и ошибки, а также замечания и пожелания на электронный адрес `mindcom100@gmail.com`, которые безусловно есть в книге объемом более полутысячи страниц, тем более, это первое издание.

О современном мире и существующей системе образования.

Обращаясь к анализу ситуации с образованием отметим, что образование как система во всем мире изменяется, но *во всем мире наблюдается недостаток действительно образованных и культурных людей*, происходит деградация населения в развитых странах мира. Само устройство Западной цивилизации в своих корнях подталкивает движение цивилизации к печальному финалу — новым темным векам, гораздо более темным чем в Европе, последовавшими после падения Западной Римской империи в 476 году новой эры. Эпохальным событием, повлиявшим на ухудшение состояния людей, является воцарение на Западе с 1981 г. спекулятивного капитализма, обожествляющего скорую прибыль, удушающего научно-техническое развитие, промышленность и как следствие: кризис 2000—2001 годов, перешедший далее в более глубокий системный кризис 2008—2015 годов, который еще не скоро и закончится. Следствием всего этого мы получили воцарение эры нового варварства в странах Запада — уничтожение систем образования, науки и культуры, которые не могут существовать в симбиозе друг без друга. Все это привело к тяжелейшему глобальному кризису во всех областях и порождению толп неграмотных, жестоких, не умеющих учиться и не желающих работать людей (особенно среди молодежи), а желающих только потреблять — живущих по девизу «хлеба уже мало, хочу “Порше”, яхту, денег, женщин, виллу, кайфа, и ничего не делать, хочу зрелищ, желаю только наслаждаться жизнью.» Для них матерный язык — это выражение истинной

сущности души и настроения, для них жизнь, это поле проявления примитивных животных инстинктов. И итогом этого является ухудшение человека во всех его проявлениях: духовном, интеллектуальном и эмоциональном. Чем же это ухудшение породы двуногих обернулось для Запада?

Сейчас Западной науке и технике уже не хватает просто средних (не гениев) выпускников ВУЗов. Стиль жизни плодит неграмотных и темных потребителей. Например, по данным Государственного фонда поддержки естественных наук (National Science Foundation, USA), 20 % взрослых американцев считает, что солнце вращается вокруг земли, более 20 % школьников 3—5 классов читают по-слогам, а по данным социологического опроса, проведенного в 2005 г. National Geographic и Roper, почти половина американцев в возрасте 18—24 лет не считает необходимым знать, где находится страна, в которой происходят те или иные важные события. Более трети респондентов заявили, что знать иностранные языки «совершенно незачем», и лишь 14 % сочли это «очень важным». Многие выпускники университетов не могут сложить десятичные дроби, если после запятой есть периодическая часть.

Сама систем образования в мире озабоченна выдачей дипломов, но не предоставлением хорошего образования. Людей делают «образованными», но не грамотными. Вот результаты проверки владения английским языком в США: «Преподаватели английского языка в колледжах были вынуждены начинать с нуля со своими студентами (для которых английский язык — родной язык!) освоение той программы, которой обучают в старших классах школ. Экзаменационные работы этих студентов по другим предметам наглядно демонстрировали неимоверно корявый и бессвязный английский язык.»[1]

Есть примеры несовершенства систем оценивания — например, гениального математика Эвариста Галуа, создателя теории групп, система образования Франции не смогла оценить по причинам неумения именно оценивать реальные знания и умения. В семнадцать лет Галуа многое сделал для создания раздела математики, который ныне даёт возможность проникнуть в сущность таких различных областей, как теория чисел, кристаллография, физика элементарных частиц и возможные позиции кубика Рубика. В том же возрасте Галуа вторично провалился на экзамене по математике при поступлении в Эколь Политекник (Политехнический институт).

Самоуверенных, но необразованных во всем мире — все больше. Речь здесь идет не только об отсутствии знаний у людей как таковых, но и о том, что многие люди уже кичатся своим невежеством. Простых способов побороть эту эпидемию «неучей» не существует: попытки механически повысить средние баллы на стандартизированных экзаменах, типа ЕГЭ в России или других странах, пичкая учеников конкретными ответами на конкретные вопросы для конкретного теста, делу не помогут. Более того, те люди, что страдают от этой болезни, как правило, не осознают своего недуга. (Как отмечал Хофстедтер, «никто же не считает, что он — против науки и культуры».) Навязывается мода в чатах искажать язык, вставлять чудные словечки, бессмысленные междометия, ругательства и всякие дурацкие смайлики вместо передачи осознанных смыслов. Общение превратилось в показ мод: вот я какой, смотрите, слушайте, а что я несу, не важно, я лишь хочу быть в центре внимания, этим я и живу. Не выйти в интернет пару раз в день, значит вычернуть день из жизни, не засветиться в Facebook или в Одноклассниках это же просто не жить...

[1] Мортимер Адлер, Как читать книги, «Манн, Иванов и Фербер», М., 2012, с. 69

Музеи мира заполнены скульптурами: сваренными кусками железа, мраморными уродливыми кусками бесформенного подражания человеческому телу... картины в стиле «черного квадрата» показывают ничто или же отвратительную безвкусицу нагромождений цвета, формы и стилей, и кто-то очень могущественный оплачивает именно такое искусство, продвигая его по всем странам и весям для привития духа безвкусицы и отрицания красоты и гармонии.

Природные данные человека государством уже не развиваются, не улучшаются — конвееры массбезвкусицы пытаются произвести только биороботов — легко программируемых потребителей для нужд производства, всего боящихся обывателей, бегущих голосовать за Большого Брата по первому свистку.

Скрытая суть системы образования — задушить природный потенциал человека, тянущийся к истине и красоте, чтобы он не мог мечтать о высоком, придумывать, созидать и претворять в жизнь свои мечты. Разрушается цепочка переходов для работы этой последовательности: от мечты к реальному воплощению. Системы образования еще с детского сада формируют только способность запоминать факты (но не учат их выводить и анализировать!), внедряется неумение отличать хорошее от плохого, по девизу: «если это есть, то значит, это должно быть» — это можно определить как пропозициональное знание. «Практически повсеместно академическая способность ученика выводится из его двух умственных способностей: логическо-дедуктивного мышления и пропозиционального знания.» [2]

Давно уже пора провести международную дискуссию среди оставшихся нормальных людей на тему: действительно ли мы, современные люди, придаем значение духовности, интеллекту и знаниям или большая часть людей уже не осознает себя чувствующими, мыслящими, а только жвачными и потребляющими животными. И насколько велика и важна часть знаний и их понимание в системе «Мир Человека»? А сколько вы отведете сил и ресурсов душе, эмоциям и почему столько? «Теперь, более чем когда бы то ни было, когда окружающий мир меняется так быстро и неумолимо, следует пересмотреть всю концепцию обучения.»[3] Мы бы добавили: и воспитания.

Говоря об информационных технологиях, мы констатируем, что являемся свидетелями возникновения новой эры «информационного апартеида», в условиях которой около 1 миллиарда человек имеют доступ в интернет, в то время как другая большая половина населения мира никогда даже не пользовалась телефоном. Нам нужна революция в обучении, которая дополнила бы революцию в области средств связи.

Культура и образование осознанно разрушаются повсеместно во всем мире, а современность с ее динамизмом не дает отечественным школам и ВУЗам времени на раскачку. Мы видим, что для того, чтобы наши школы и университеты могли использовать возможности XXI века, нужны нетрадиционные, эффективные решения. Например, американский образовательный бизнес чрезвычайно подвижен, пластичен, университеты постоянно ищут новые возможности для зарабатывания денег, необходимых для собственного развития и внедрения новых учебных технологий, а в России создана такая система, что внедрить что-либо новое просто невозможно по причине заорганизованности чиновников от образования и местничества руководства учебных заведений.

---

[2]Кэн Робинсон, Образование против таланта, «Манн, Иванов и Фербер», М., 2013, с. 101

[3]Воротников В. П., замест. предс. Комитета по законодательству Гос. Думы РФ

Педагогическая практика показывает, что не все дети могут уже поступить в хорошую школу (каковых становится все меньше), еще меньше могут ее окончить, а из числа окончивших многие весьма поверхностно усваивают программу основных дисциплин. Аналогично обстоит дело и с высшим образованием. Хотя оно и не столь массово, как школьное, однако процент усвоивших предлагаемые вузом знания оказывается еще ниже, чем в школе. Если в школе он предположительно доходит до 70 %, то в вузе он понижается до 20 %. В качестве примера сошлёмся на США, где испытывают трудности с инженерными и техническими кадрами, текучесть которых составляет более десяти процентов в год. Быть настоящим инженером тяжело, это такая нагрузка на интеллект, от которой стремятся уйти даже справляющиеся с ней. Зачем учиться много лет: высшая математика, физика, программирование и пр. когда лучше закончить обучение без напряжения, став, например, юристом, экономистом или менеджером. Сидеть в офисе, перекладывать бумажки и никакого напряжения, пить кофе, болтать о всяком, играть в компьютере, лазить по сайтам (часто по порно) в интернете. Выпускники вузов не знают уже элементарного, например, не понимают, как сложить дроби $1{,}9 + 6{,}(3)$ или $5{,}(7) + 3{,}6(2)$!

Еще более сложным оказывается положение с научными кадрами: ученых, способных продуцировать новые идеи, — единицы. В России уже 20 лет никто не хочет идти в ученые, зарплата в 4 раза меньше чем у дворников или продавцов в магазине. Даже число просто компетентных специалистов в любой области на своем уровне удивительно мало, особенно в сравнении с населением страны. И дело не просто в потребности улучшения системы образования, методах отбора в вузы и аспирантуру, методах расстановки кадров. Сама система с программированием отрицательных структур жизни, поведения, которая начинается еще с детских садов, затем в школе и в ВУЗе производит только низкосортный материал, или еле всплывающий в аквариумах мелких фирм планктон, или выполняющих примитивную работу исполнителей низшего звена, не имеющих ввиду отсутствия образования никаких жизненных перспектив.

В аспирантуре технических вузов понятия не имеют например, об инъективных функциях, большинство не определит количество способов выбрать r объектов с учетом порядка из N объектов, что такое сравнимость по модулю, не смогут извлечь квадратный корень из натурального числа $\sqrt{427}$ с точностью 0,0001 без калькулятора и еще много-много чего они не знают, и самое печальное, и знать не хотят. Но, скоро, они будут обладателями диплома кандидата наук...

Сейчас для обычного человека имеется некоторый суммарный потолок, который говорит о том, что происходит процесс переэксплуатации неподготовленного с детства интеллекта в рамках сложившейся неэффективной системы воспитания и образования. Его эксплуатируют неправильно, распыляют по многочисленным несущественным явлениям, заставляют углубляться в совершенно ненужные предметы, а самое важное, не закрепляют необходимые знания как надо. То есть, можно сказать, что для повышения процента хорошо образованных людей необходимо менять как систему воспитания с дошкольного возраста, так и систему образования в целом. И культура, при этом, является самым важным базисом.

Поэтому сегодня, повсеместно сталкиваются с границами возможностей интеллекта при существующей, старой и неэффективной системе обучения, сложившейся во всем мире. Интеллект как ресурс человечества, причем конечный ресурс связанный с культурным базисом, должен стать предметом тщательного научного исследо-

вания, но это работа начнется только после долгого глобального кризиса, способного уничтожить часть человечества; и если оно все же выживет, то надо будет начинать почти с нуля. Деградация мира идет слишком быстрыми темпами.

Но, все же, мы верим в светлое общество будущего, в гармоничного человека — общество знаний и правды, и задача данной работы заложить основы нового, более глубокого и качественного образования, являющегося неотъемлемой частью истинной культуры, начиная с первых классов школы, чтобы затем, хорошо образованный человек сам мог выбирать путь к любым вершинам.

О перспективах нового метода изучения математики.

Не подлежит сомнению факт, что только одаренные дети способны стать будущей элитой страны и повести за собой других. Без качественной элиты, направляющей народ и страну, ни то ни другое существовать не может.

Последние годы автор работает над темой «повышение эффективности учебного процесса» программы: “Elite Training Program on Science Subjects” (ETPSS) («Программа подготовки элиты по точным учебным предметам») и Children’s Talent Cultivation (CTC) («Развитие детской одаренности»).

Стремительные изменения во всех сферах жизни общества ставят перед системой образования новые задачи, от решения которых зависит возможность сохранения и преумножения потенциала страны и русского народа. Одна из них — *развитие детской одаренности*, которая является неотъемлемой частью более широкой проблемы гармоничного развития и самореализации личности в образовательной и профессиональной деятельности, в семье и общественной жизни.

Автор по первому образованию — инженер, по второму образованию — филолог (Philology and Methodology of Teaching). Цель экспериментов и практической деятельности автора — содействовать внедрению современных технологий развития детской одаренности в практику обучения и воспитания. Особое место в данной методологии занимают современные информационные технологии.

Изучение детской одаренности в связи с образовательной практикой.

Проблема разработки концепции одаренности интенсивно обсуждается в современной психологии. Различные варианты концептуальных решений предложены многими специалистами. Все существующие концепции акцентируют внимание на определенных аспектах этого сложного психического явления. Изучение детской одаренности как психического явления изначально актуализировано образовательной практикой. В развитии этой интегральной личностной характеристики образование выступает как один из ведущих факторов. Психолого-педагогическая теория и образовательная практика всегда провозглашали задачу заботы о детской одаренности, о раннем выявлении, всемерном развитии детских талантов и способностей, выражали стремление решать проблемы специального обучения одаренных детей. Но декларировавшие эти идеи, реальные творцы образовательных систем часто были не искренни в этом желании. Признавая, что высокий уровень интеллектуально-творческого развития служит естественным гарантом эффективности функционирования механизмов экономического и социального прогресса, они не могли не понимать того, что эти же качества таят в себе и весьма специфическую опасность для правящих классов и властителей мира. *Духовность и высокий интеллектуально-*

творческий потенциал — гарантия подлинной личной свободы. Человек с высокоразвитым интеллектуально-творческим потенциалом менее подвержен манипулированию извне, мало пригоден для роли послушного исполнителя, он не будет обывателем и следовать указке рекламы для бездумного потребления. Появление новых тенденций в развитии общества вывело проблему развития детской одаренности в число основных, позволяющих преобразовывать этот, не совсем правильно развивающийся мир.

Общие тенденции и направления, по которым ведутся изыскания большинства специалистов в области психологии одаренности, позволяют сделать вывод о том, за последнее время эта проблема фактически была сведена к вопросам психологии интеллекта и креативности. Были упущены духовность и физическое развитие, как неразрывные компоненты гармоничной личности. Подчеркнем, что одаренность это интегральное свойство личности и динамическая характеристика.

«Выживает не самый сильный, и не самый умный, а тот, кто лучше всех откликается на происходящие изменения.» (Чарльз Дарвин) Истинная креативность может исходить из реальных потребностей данного момента или видения будущего. Каждый момент жизни требует применения креативности, чтобы выбрать или придумать лучшее решение на данном перепутье.

Долгое время преобладал подход, что одаренность изначально не задана генотипом и зависит фатально от условий среды. При более серьезных объективных исследованиях этот тезис был опровергнут.[4]

Проработка методической литературы и практический опыт преподавания за период с 1990 г. позволили сформулировать гипотезы о многофакторных моделях одаренности, проверявшихся в ходе теоретического и эмпирического исследования, а затем и подтвердить их.

«В современной психологии на основе слова «одаренность» созданы два термина: «одаренные дети» и «детская одаренность». Термином «одаренные дети» обычно обозначается особая группа детей, опережающих сверстников в развитии. Второй термин — «детская одаренность», напротив, не предполагает селекции, а указывает на то, что каждый индивид имеет определенный интеллектуально-творческий потенциал.» [5]

В соответствии с этим возникают две задачи:

- разработка комплексных основ и создание системы развития одаренных и талантливых детей;
- разработка основ и практических мер, направленных на развитие умственного потенциала каждого ребенка в сфере образования.

Развитие детской одаренности и содержание образования в процессе комплексного развития всех структур личности

1) Развитие детской одаренности, в условиях образования, обеспечивается гармоничным воспитанием и комплексным обучением, приводящим к направляемому развитию у ребенка внутренних позиций к творчеству и стимулирующим другие внутренние программы самообучения и раскрытия миру.

[4] http://rl-online.ru/info/authors/133.html

[5] Там же

2) Содержание образования должно разрабатываться на основе идеи комплексного развития всех структур личности. Создавая условия для вариативного решения ребенком культурных и образовательных проблемных ситуаций, мы, тем самым, содействуем развитию детской одаренности в широком плане.

3) Идея комплексного развития всех структур личности требует пересмотра качественных параметров содержания образования, что предполагает, рассмотрение его на двух уровнях «горизонтальном» — в ширину и «вертикальном» — в глубину. Уровень «горизонтального» обогащения предполагает дополнение традиционного учебного плана специальными курсами («Развития мышления», «Развития контроля над эмоциями», «Развития психосоциальной сферы» и «Развития физической сферы»).

«Уровень «вертикального» обогащения требует радикального пересмотра традиционных учебных программ и создания принципиально новых учебных программ и пособий. Прообразы которых по некоторым учебным предметам уже созданы и апробированы, показав высокую эффективность в процессе обучения. Это достигается за счет: принципиального пересмотра содержания всей учебной деятельности; его углубления и выявления комплексной связи с окружающим миром; создание расширяемого набора положительных примеров для подражания; гармоничный баланс собственной исследовательской практики и репродуктивного усвоения знаний; ориентации на интеллектуальную и эмоциональную бесконфликтную инициативу; баланс собственной исследовательской практики над репродуктивным усвоением знаний; ориентация на интеллектуальную инициативу; установления гармоничного баланса в использовании заданий дивергентного и конвергентного типов; максимально глубокой проработки изучаемой темы «в глубину» и «в ширину»; высокой самостоятельности и самоконтроля всей учебной деятельности; формирование способности к критичности, объективности и лояльности в оценке чужих идей; вариативности информационного обогащения среды; гибкости в использовании времени, средств, материалов; активизации трасформационных возможностей информационно-предметно-пространственной среды; создание расширяемого набора положительных примеров для подражания; гармоничный баланс собственной исследовательской практики и репродуктивного усвоения знаний; ориентации на интеллектуальную и эмоциональную бесконфликтную инициативу; баланс собственной исследовательской практики над репродуктивным усвоением знаний; ориентация на интеллектуальную инициативу; максимально глубокой проработки изучаемой темы «в глубину» и «в ширину»; высокой самостоятельности и самоконтроля всей учебной деятельности; формирование способности к критичности, объективности и лояльности в оценке чужих идей; вариативности информационного обогащения среды; гибкости в использовании времени, средств, материалов; активизации трасформационных возможностей информационно-предметно-пространственной среды; гармоничное сочетание развивающих возможностей учебного материала с его информационной насыщенностью; осуществления образовательной деятельности в соответствии с заданными целевыми функциями образования и с учетом познавательных потребностей детей каждого возраста, пола, расовых отличий и уровня развития; сочетания уровня развития продуктивного мышления с навыками его практического использования; сочетания индивидуальной учебной и исследовательской деятельности с её коллективными формами; адаптивности в использовании времени, средств, матери-

алов; умении сочетать индивидуальную учебную и исследовательскую деятельность с её коллективными формами (умение работать в команде).»[6]

Методологической основой исследования являются использование наработок, созданных человечеством в рамках систем комплексного развития человека: йога, древнерусское родноверие, даосизм, буддизм, синтоизм, суфизм и современных философских и психологических концепций личности. Раскрыта и учитывается совокупность теоретических положений рассматривающих человека, как субъекта деятельности и общения, раскрывающих способы влияния на активизацию и проявление его сущности и личности, рассматривающих детскую одаренность как целостное природно-социальное явление.

Мы исходим из положения о том, что развитие детской одаренности обеспечивается воспитанием, обучением и направляемо-заданным развитием у ребенка внутренних позиций к творчеству и раскрытию себя как гармоничной личности, стремящейся к самосовершенствованию.

Создавая условия для вариативного решения ребенком обучающих и образовательных проблемных ситуаций, мы, тем самым, содействуем развитию детской одаренности. Предполагается пересмотр качественных параметров содержания образования, что требует рассмотрения его на двух уровнях «горизонтальном» и «вертикальном». Уровень «горизонтального» обогащения предполагает обогащение традиционного учебного плана специальными курсами («Развитие мышления», «Развитие эмоций», «Развитие психосоциальной сферы» и «Развитие физической сферы»)

Курс «Развитие мышления» включает в себя: «Логические методы», «Внелогические методы мышления» (Эвристики, Стратагемы, Продуцирование схем решения (по аналогии с ТРИЗ)), «Развитие типов памяти», «Развитие внимания», «Развитие глубины сенсорных каналов», «Развитие осознавания и самоконтроля», «Развитие функций самоконтроля при формулировании и достижении целей».

«Развитие психосоциальной сферы» включает в себя: «Познание и осознание себя как личности», «Развитие функций самоконтроля над эмоциями и желаниями», «Развитие самопожертвования и высших духовных качеств», «Развитие сверхсознания и подсознания» (по терминологии Шри Ауробиндо).

«Развитие физической сферы» включает в себя: «Гармоничное развитие всех психофизиологических систем организма», «Подчинения психофизиологии сознанию» — волевое управление жизнью.

Уровень «вертикального» обогащения требует радикального пересмотра традиционных учебных программ и всех типов пособий и средств обучения; переподготовки преподавателей и воспитателей еще начиная с детского сада, просвещение и обучение родителей.

Основные результаты исследования публиковались в печати в виде учебников и статей в интернете; использовались в работе ряда репетиторов г. Москвы, г. Санкт-Петербурга.

В нашей работе над ETPSS анализируются проблемы оценки, формализации и представления знаний, методы повышения педагогической эффективности учебного и экзаменационного процесса и прагматика разработки и применения этих методов по разным учебным предметам, учащихся разного возраста.

---

[6] http://rl-online.ru/info/authors/133.html

Пока нет достаточно разработанной и универсальной парадигмы, позволяющей описать теорию, технологии и практические методы подготовки элиты или (способных) одаренных учащихся разных возрастных цензов, не удовлетворяющихся типовой подготовкой. Именно разработкой такой парадигмы мы занимаемся давно, успешно применяя все наработки в практике обучения.

Некоторые вопросы know-how

В данной методологии, основной технологией является *комплексное выделение и построение эффективных структур качественной сложности*, чаще всего являющимися иерархическими связными структурами, позволяющих значительно повысить скорость и качество обучения у учащихся по широкому набору учебных дисциплин.

Иерархическая структура — многоуровневая форма организации объектов со строгой соотнесенностью объектов нижнего уровня определенному объекту верхнего уровня. Графически представляется часто в виде дерева (см. теорию графов).

Иерархическая структура используется: в науке, как метод классификации (например, классификация биологических видов, соответствует общим и частным признакам. Часто этот метод классификации связан с генезисом. При проектировании и эксплуатации технических объектов, соответствует «деталировке»: разбиению крупных объектов на более мелкие. В планировании, используется как метод детализации планов. В программировании, как метод порождения от общего предка объектов, обладающих все более детализированными признаками. [7])

В действительности содержание базового термина «иерархия» значительно шире: он может служить средством для описания взаимных связей и отношений вообще между любыми предметами и явлениями, связанными между собой отношениями подчиненности или старшинства. Структура вселенной иерархична, наша память иерархична, логика и математика иерархичны, любой язык или учебный предмет также иерархичен.

Основа разработанной методологии базируется на методах анализа иерархий с использованием комплексного анализа и вышеописанных технологий. Широко используются инженерные подходы при всех научных изысканиях. Также мы занимались разработкой различных тестов и систем экзаменов для детей и взрослых по разным учебным предметам.

Подготовлены и проведены многочисленные эксперименты, позволяющие зафиксировать факторы, влияющие на учебный процесс, получить прямые и обратные связи для улучшения качества тестирования. Разработанная методология, помимо наличия теоретической базы, прошла и практическую проверку, а также реализована в виде серии учебников и курсов лекций по разным учебным предметам (Английский язык, Немецкий язык, Математика (Арифметика, Алгебра, Геометрия), Программирование, Методика тренировки йоги, ушу и цигун).

Так, например, давно уже написанный учебник математики для спецшкол (предлагаемый том), позволил ученикам за счёт высокого уровня подготовки выигрывать математические олимпиады. В частности, победителем 24 Международного математического Турнира городов России был наш ученик Святослав Усачёв, олимпиада проводилась для учащихся 9-х классов. Святослав на момент участия в олимпиаде был на 2 года моложе всех участников, и все равно, он занял 1 место получив

[7] `http://ru.wikipedia.org/wiki/`

диплом победителя турнира. (Ознакомиться с результатами 24 Международного математического Турнира Городов, осенний тур, основной вариант (27 октября 2002 года), Москва, 9 класс можно на сайте: `http://www.turgor.ru/problems/24/9.php`.)

Ученики занимаются так же по нашему учебнику программирования («Программирование на Python»), который пока не издан. Поэтому к 9-му классу Святослав не только прекрасно знал математику, но уже мог профессионально программировать на Паскале, Python и C, написав, в частности, несколько многооконных игр в среде Windows для микрокомпьютера еще в возрасте 9 лет! По окончании школы Усачев Святослав поступил в МГУ на механико-математический факультет, который он успешно затем закончил.

В 2011 году другой наш ученик: Кирилл Марк занял 1 место на математической олимпиаде г. Москвы. Оба победителя Святослав и Кирилл занимались по данной методике и по представленному здесь учебнику математики (Арифметика, Алгебра, Геометрия, Информатика). Кирилл Марк сейчас изучает немецкий язык по моему учебнику немецкого языка (вводный курс). Также он занимал призовые места на олимпиадах по программированию.

В процессе подготовки наших учеников, мы используем не только разработанные нами учебные пособия, но и специально созданные обучающие компьютерные комплексы, повышающие в разы способность запоминать и усваивать информацию, значительно лучше приобретать требуемые практические навыки. На основе вышесказанного можно утверждать, что методика “Elite Training Program on Science Subjects” позволяет готовить будущую элиту страны по любым техническим, филологическим и прочим дисциплинам, а в частности, по таким значимым предметам, как математика, программирование, иностранные языки, физика и пр. Методика, благодаря своей гибкости, позволяет подстроиться практически под любой учебный предмет, обладающий достаточной степенью формализуемости и структурности. Сейчас автор участвует в программе подготовки методики обучения игре ГО.

В 2001 году был подготовлен и опубликован «Учебник современного английского языка» в 2 томах в РФ, учебник был издан крупным издательством после обязательной процедуры рецензирования двумя докторами наук. Учебник был издан тиражом 10000 экз. и был хорошо принят сообществом преподавателей и учащихся. Учебник успешно продавался в 4 странах: РФ, Беларуси, Украине и Казахстане. В 2009 и 2011 этот учебник был улучшен и переиздан.

Последнее место работы автора было в Российской академии Образования в «Институте содержания и методов обучения». Там автор начал писать диссертацию на тему: «Повышение эффективности учебного процесса и подготовки учебных пособий». В связи с проблемами финансирования Института и мизерной зарплатой научного сотрудника (4500 руб. в месяц!) (это более чем в 4 раза меньше, чем зарплата дворника) пришлось прекратить подготовку диссертации и уволиться.

После этого автор продолжил работать над своим учебником «Учебник современного английского языка» подготовив уже в 8 томах Новый Фундаментальный Курс, позволяющий выводить учащихся с нулевого уровня владения английского языка на уровень Advanced за достаточно короткий срок по сравнению с другими методами.

Краткое резюме для учебника по математике

Стремлением всех наук и их постоянной попыткой является приближение к максимально точному отражению объективной реальности и формализации опыта.

«Лучше всего это можно сделать, собрав воедино наиболее общие научные аксиомы, имеющие силу по отношению к материи любой индивидуальной вещи», — считает Ф. Бэкон. Эта цитата отражает и мой подход к исследованиям данных проблем.

При изучении математики необходимо сначала изучение философских основ мировоззрения, логики и теории формализации, соответственно необходимо тщательное изучение курсов логики и теории множеств перед и параллельно изучению непосредственно математики.

В настоящее время наиболее известным и доступным способом изучения математики является последовательное изучение теории, примеров употребления и закрепление пройденного в упражнениях и задачах, а также экзамены и тесты после каждого пройденного раздела. Самым трудным для любого автора является задание последовательности изучаемых тем, глубины каждой темы, подбор хороших упражнений и кратких и логичных теоретических разделов.

Основные задачи данного курса состоят в следующем.

1) Снизить порог сложности объяснения и понимания материала для учеников.
2) Повысить качество усвоения и проверки материала (как теории так и практики).
3) Довести практические навыки ученика до автоматизма.
4) С учетом первых трех пунктов сделать доступным прохождение тем математики в более раннем возрасте.

По данному учебнику можно учить учеников 3–4 классов общеобразовательной школы и старше, а так же его могут использовать и те (взрослые), кто желает повысить свой уровень владения математикой.

Данный проект основан на комплектах учебников, объединённых единым методическим обеспечением. Созданная парадигма обучения позволяет систематически, в одном стиле и в единой форме изучать математику и другие предметы ученикам разного уровня подготовки. Каждая порция теории и задания к ней в учебнике становятся основой, на которой усваивается и отрабатывается класс задач одного типа. Учитель имеет «заготовки», в которых он отбирает нужный вариант из представленных многочисленных возможностей, формирует удобную логическую цепочку, соответствующую объясняемому материалу. Вид записи теории и решений близок к тому привычному, которым учитель обычно пользовался ранее на доске в классе. Учитель имеет возможность проводить урок в удобном ему или отработанном стиле. Вводимое здесь представление информации позволяет показывать многие возможности изменения числовых значений или символьных, создания правильных для конкретных значений тестов и контрольных, имеются также тщательно выверенные ответы.

Для данного проекта создаётся новое методическое компьютерное обеспечение к учебникам, учитывающее возможности компьютера на уроке и дома и позволяющее повысить эффективность обучения. Учителя, использующие в своей практике данные учебники, отмечают, что облегчились условия для старательных детей, для детей, которые обладают более продвинутым уровнем владения математическими явлениями, и, которые теперь могут решать десятки однотипных задач и самостоятельно проверять ответы. Для детей с замедленным темпом усвоения данные

учебники дают возможность двигаться с удобной скоростью. Учебник удобен для добросовестных родителей, которые хотели бы проверить, как их сын или дочь поняли тему, но сами не имеют достаточных знаний для контроля, для часто болеющих детей, инвалидов. К настоящему времени комплект используют систематически на уроках приблизительно 70 учителей в Красноярском крае, Москве, а также в других странах СНГ.

Психологическо-философское введение

В главе кратко анализируются проблемы формализации, представления знаний, методы повышения педагогической эффективности учебного процесса. Темы настолько сложные, что иной раз кажется, что к ним и подступиться-то невозможно. Что бы ни было предложено читателю в качестве моделей, по существу, многое не может быть показано: например, что позволило бы доказать, что исследователь, пользуясь данной методологией, способен построить свою версию учебного процесса? И, в то же время, именно он сам сможет рассчитать большую эффективность данной версии, в сравнении с предыдущими. Педагогика пока еще не точная наука и многое нельзя рассчитать и предсказать заранее: когда ученики еще ничего не знают и пришли на первый урок нового предмета, как же можно что-либо предсказывать об их результатах обучения или воспитания? Возникают вопросы, например: что в обучении характеризовалось такими-то параметрами? Современный этап наук об обучении человека еще находится в зачаточном состоянии. Тем не менее, все эти вопросы, а также многие другие, не менее сложные, не менее абстрактные, на мой взгляд, имеют непосредственное отношение к пониманию природы процесса обучения и воспитания в целом и повышения эффективности педагогических процессов в частности. Что же делать? Отказаться от рассмотрения подобного рода вопросов или делать лишь такие обобщения, которые более или менее близки по уровню абстрактности к тем, которые предлагаются конкретными науками, а потому — пусть и не в полной мере, и не непосредственно — все же могут быть подтверждены их данными? Но ведь философия, психология, эргономика и системный анализ, на базе которых мы будем строить свои посылки и доказательства тем и отличаются от всех прочих областей человеческой культуры и наук, что позволяют говорить о таких запредельных вещах, затрагивать проблемы, которые другими дисциплинами — по определению — не будут даже рассматриваться. Кроме того, как мне кажется, очень интересно и очень полезно попытаться понять, какова самая общая природа наиболее значимых для человека (как вида) вещей, какими силами они направляются, по каким принципам изменяются и т.п. Поэтому я, все-таки, попытаюсь рассмотреть эти вопросы, хотя отчетливо сознаю уязвимость своей позиции в связи с этим.

Стремлением всех наук и их постоянной попыткой является приближение к максимально точному отражению объективной реальности и формализации опыта. «Лучше всего это можно сделать, собрав воедино наиболее общие научные аксиомы, имеющие силу по отношению к материи любой индивидуальной вещи», — советует Ф. Бэкон.

Автор предлагает опереться на используемое им решение основного вопроса обучения, находящегося на стыке областей педагогики, системного анализа, философии, психологии и им является *методология выделения* (*построения*) *эффективных структур качественной сложности*, позволяющая значительно повысить скорость и качество обучения по ряду дисциплин.

Были ли в научном сообществе попытки поставить данную проблему, решить её? Почему данная проблема еще не решена? Это происходит потому, что человеческое мышление, основанное на существующих в настоящее время парадигмах, обладает очень большой инертностью и инерционностью. Большинству, чисто психологически, выбраться из этих вязких, порой навязываемых различными авторами и учеными состояний мышления и стереотипов повседневной деятельности, чрез-

вычайно сложно. Поэтому сама постановка этой проблемы уже является сложной проблемой.

Переходя к анализу состояния наук в современном мире, можно сказать, что «любая ветвь современной науки старается в своем становлении утвердить свою независимость, основываясь на своих собственных принципах и парадигмах. Все, что выходит за ее пределы, отрицается, изгоняется, клеймится, или, по меньшей мере, объявляется непознаваемым и не принимается во внимание. Под предлогом своей независимости современная наука полностью оторвана от высших принципов, что практически приводит ее к полному тупику».[8]

Предъявление нового взгляда всегда требует смелости — общепринято, что ученый должен заниматься только своей узкой областью, а об остальных рассуждать в узком кругу, желательно неформально с друзьями.

Вернемся к основаниям всех наук. Вот, что написал Аристотель: «Есть некоторая наука, исследующая сущее как таковое, а также то, что ему присуще само по себе. ...А так как мы ищем начала и высшие причины, то ясно, что они должны быть началами и причинами чего-то самосущего», а Н. О. Лосский обобщил: «Метафизика есть наука о мире как целом». Мы добавим, мире как синархии — некоей однородной системе иерархий.

Какая же современная наука изучает мир как целое? — Таковой пока нет. Во времена Аристотеля видимо была, а в современном мире мы имеем веер наук, множество мнений и огромное разногласие по любым вопросам. Для того, чтобы изучать и понять мир как целое необходимо вернуться к древнейшим истокам единого начала нескольких наук: психологии, философии, математики, как минимум. Раньше мудрецы понимали мир, как единое целое, объединенное в иерархии. И сейчас многие явления нашей жизни можно представить в виде иерархий.

Иерархия (от греч. hieros священный и arche власть) — порядок подчинения низших высшим; вообще расположение от низшего к высшему или от высшего к низшему. В общей теории систем термин применяется для описания любых системных объектов; в теории организации с ним связывают принцип управления; в лингвистике различают иерархию уровней (ярусов) языка.

Концепция иерархии используется для описания многих сфер, явлений и объектов. Иерархическая структура — многоуровневая форма организации объектов со строгой соотнесенностью объектов нижнего уровня определенному объекту верхнего уровня. Графически представляется в виде дерева.

Иерархическая структура используется в науке как метод классификации (например, классификация биологических видов, соответствует общим и частным признакам. Часто этот метод классификации связан с генезисом. При проектировании и эксплуатации технических объектов, соответствует «деталировке»: разбиению крупных объектов на более мелкие. В планировании, как метод детализации планов. В программировании, как метод порождения от общего предка объектов, обладающих все более детализированными признаками.[9]

В действительности содержание базового термина «иерархия» значительно шире: он может служить средством для описания взаимных связей и отношений вообще

---

[8] Е. Б. Чижов. *Введение в философию математических пространств*, М.: УРСС, 2004, с. 13.

[9] `http://ru.wikipedia.org/wiki/`

между любыми предметами и явлениями, связанными между собой отношениями подчиненности или старшинства.

Сама структура вселенной иерархична, наша память также иерархична, логика и математика иерархичны, любой развитый язык опят же иерархичен.

Теперь рассмотрим два понятия: *качество* и *количество*. Простой пример: перепрыгнуть небольшую лужу легко, прыгнуть через пропасть, шириной в 7 метров, — большинству недоступно. Это может сделать только мастер спорта, после многолетних тренировок. Так что есть два типа сложности: на преодоление одной необходимо небольшое усилие и распространенные умение. Для второго — надо что-то совсем другое, на грани невозможного: *надо сделать качественный скачок*.

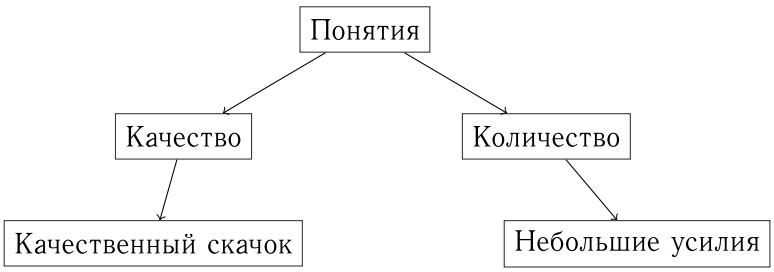


Рис. 1. Методы решения проблем

Условимся в терминах. В первом случае мы будем говорить о количественной сложности, во втором — о качественной. Для преодоления количественной сложности достаточно терпения и небольших усилий на коротком отрезке времени, а для качественной — необходим скачок сознания, воли, энергетики тела. Тогда получается, что постепенной (тихой и вялой, полусонной) эволюцией прийти к скачку качественной сложности невозможно. Для качественных изменений требуется всегда сверхусилие, иногда большая жертва. Преодоление качественной сложности многими людьми вызывает революции в науке, религии, искусстве. Людей, обладающих внутренним врожденным стремлением к скачку качественной сложности называют пассионариями, иногда гениями, блаженными, сиддхами, продвинутыми йогами или достигшими просветления.

Итак, *в любой иерархии имеется подмножество, которое тоже иерархия, но оно есть самое важное, это «существенная» (цепочка) структура иерархий, связанная с «качественной» стороной явлений.* Такую иерархию мы назовем структурой качественной сложности.[10]

У нас основным понятием, используемым для описания любой иерархии будет структура качественной сложности, она образована уровнями (иерархиями) качественной сложности.

Качественной сложностью назовем *коэффициент сложности*, присущий данной иерархии или её уровню. Переход на следующий, более высокий уровень, не всегда алгоритмическая задача, часто трудно, или даже невозможно пока даже примерно описать эвристики, не то чтобы алгоритмы переходов. Поэтому часто не удается формализовать метод расчета коэффициента сложности присущего данной иерархии или её уровню.

[10] В. А. Малышев. *Цепочки качественной сложности.* М., 1997, с. 7

Как происходит переход на следующий, более высокий уровень, мы пока во многих случаях не можем объяснить ввиду непонимания и незнания многих механизмов функционирования сознания, незнания взаимозависимостей между частями сознания, памятью, волей, эмоциями, энергетикой тела, связей с другими измерениями и мирами, но все же, в реальной жизни, некоторые ученики переходят на более высокий уровень сложности при изучении какого-любо предмета. И, однако, один ученик легко решает дифференциальные уравнения, а другой не может ни понять, ни решить и квадратного, хотя и сидит до полуночи и зубрит все подряд. Почему и как это происходит пока большая загадка для многих наук, и особенно для наук, изучающих человека.

Основываясь на структурах качественной сложности, в данной работе были намечены несколько путей объединения и семантической интерпретации общих понятий и оснований философии, психологии, логики, математики и лингвистики. Благодаря этим путям удалось наметить пути разрешения некоторых важных вопросов, связанных с повышением педагогической эффективности и методологии преподавания ряда учебных дисциплин (иностранные языки, арифметика, алгебра, геометрия, программирование).

Одной из основных причин человеческих неудач и бед является излишняя защита стиля своей жизни и мышления, при нахождении на уровне своих структур качественной сложности. Одно из проявлений этого есть нетерпимость многих видеть в своем окружении людей, которые ведут себя не так, кто находится на более высоком уровне овладения структурой качественной сложности конкретного объекта, сферы нравственности, энергетики, интеллекта, духовности. Например, он знает английский язык в несколько раз лучше, чем я. Понимает математику так, как я и близко не могу понять. Стремиться к Богу со всей душой, а мне это безразлично и меня пугает. Именно поэтому люди стремятся быть в окружении себе подобных. Психологически им легче быть среди "своих".

Тебя могут понять только те, у кого примерно равный с твоим уровень вхождения, понимания, владения структур качественной сложности данной сферы. Многим, те, кто ниже них не интересны, они, порой, ощущают их укор снизу; те, кто выше них – их отпугивают, часто, они их боятся и их не принимают за своих. Пугает все, что непонятно и недоступно. Полюбить можно только близкого по уровню тебе, тех, кто выше можно уважать, завидовать, бояться или ненавидеть.

Каждый с большим удовольствием анализирует структуру глупости ниже себя, чем структуру ума выше себя. Сложно понять, увидеть, ощутить пребывание другого на структуре качественной сложности более высокой чем есть у тебя, её лишь можно почувствовать.[11] Это ощущение в одних вызывает благоговение, в других — зависть и злобу.

Можно сравнивать уровни структур качественной сложности у разных людей, но не существует общей универсальной структуры качественной сложности вне личности и вне конкретной сферы.

Высокие профессионалы не любят общаться со слабыми, с более низким развитием, любят только сильных и способных учеников и коллег.

---

[11] В. А. Малышев. *Цепочки качественной сложности.* М., 1997, с. 19

Структуры качественной сложности (цепочки) существуют в ансамблях, кластерах, кортежах, то есть мы рассматриваем цепочки как взаимодействующие и взаимопроникающие между собой составляющие некой системы.

Например: сознание человека состоит из структур качественной сложности, любую науку или учебный предмет можно представить как структуры качественной сложности. Преодолеть качественную сложность можно только собственными усилиями, а методология помогает сделать это быстрее и легче. Если ученик не хочет учиться, то и десять мудрецов не смогут впихнуть в него никакие знания и навыки, а тем более заставить сделать качественный скачок.

Как же подойти к практическому применению парадигмы структур качественной сложности? В любой иерархии, науке или учебном предмете можно и необходимо выделять первичные объекты — *Начала*, на которых строится данная наука (учебный предмет), также необходимо выделять связи между этими объектами, показывающие их взаимодействие, «дающие им жизнь». Если это так, и если мы говорим о настоящей науке, то *основные Начала должны быть доказаны*, а не приняты аксиоматически.

Философско-логическо-математические Начала должны при помощи своих единых начал описывать реальный и любой другой мир, порождаемый Природой, а Человек — это лишь часть Природы, хотя и встроенная Божественным Разумом (Богом) в эту саму Природу. Поэтому все должно согласовываться, соединяться, порождаться всем и из любого объекта A можно перейти к другому объекту B по логическим и другим цепочкам переходов (взаимодействий), или скачков, которые, к сожалению, пока еще в большинстве своем, не открыты, и даже хороший специалист в одной области уже часто не понимает другого в смежной области.

Формализация структур, связанных с сознанием пока еще не решенная ни в общем виде, ни в частном случае задача для наук. Но, некоторые аспекты его функционирования удалось немного раскрыть, формализовать и перевести на уровень стратегий, эвристик и даже алгоритмов, что и позволило повысить как качество обучения учащихся, так и скорость обучения, что далее показано на конкретных примерах.

Часто умению преодолевать уровни структур качественной сложности, выполнять качественный скачок можно научиться и научить, при условии, что ученик действительно хочет измениться, и приложит достаточно усилий на длительном отрезке времени. Описанию этого и посвящена данная работа.

Одного великого скульптора спросили, как он работает, как у него получаются такие красивые и совершенные статуи? Он ответил, что надо всего лишь отсечь ненужное и получить то, что вы хотели. Данная аналогия применима и к научной работе. Ученый должен жестко ограничить себя рамками намеченного «маршрута», пути своего научного исследования, по которому он пройдет и сможет его показать другим. На первом этапе необходимо сконцентрироваться на самом главном и существенном. И это будет уже новый взгляд, новая структура.

Современные тенденции обновления содержания образования и изменения форм трансляции знаний требуют введения новых моделей в курсах многих дисциплин. Методология структур качественной сложности может быть использована при разработке новых и оптимизации уже созданных курсов учебных предметов, предоставляя большой потенциал методов и средств для повышения эффективности учебного процесса.

Большая наглядность визуализации моделей, возможность рассмотрения механизмов образования связей между объектами и их многоуровневого воздействия на объекты исследуемой сферы, более подробно позволяют описывать предметную область и сам процесс обучения, что делает их педагогически и эргономически целесообразными для использования их в качестве методологии для разработки учебных пособий.

Методология структур качественной сложности обладает комплексом необходимых дидактических свойств:

— наглядность и информативность (отражает свойства исследуемых объектов и закономерности их взаимодействия в учебном процессе)

— позволяют более точно описывать исследуемую область

— доступность и универсальность

— адаптированность (для начала использования данной методологии достаточно уже имеющихся знаний у авторов учебных пособий, а необходимые новые фундаментальные понятия будут вводится постепенно и логически связно)

— комплементарность и совместимость с используемыми методологиями особенно с комплексным анализом, с системным анализом и с объектно-ориентированным анализом и проектированием.

— динамичность (расширяет функции статических по своей сути многих старых методик, позволяя увеличить их потенциал, подняв его эффективность)

— инструментальность (в руки исследователя и преподавателя попадает инструмент познания, конструирования сфер объективной реальности)

Данная методология приводит к расширению и углублению учебного и методического материала.

Введение такой методологии изменяет содержание обучения следующим образом.

1) Облегчает восприятие учебного материала за счет замены способа подачи информации с разных точек зрения, не связанных между собой приводя к комплексному видению исследуемого объекта как единой сущности, а не собранию разрозненных черт и структур.

2) Упрощает подачу учебного материала:

3) Углубляет содержание обучения за счет использования принципиально более подробных моделей исследуемого объекта с расширенными дидактическими свойствами:

4) Позволяет выявить корреляции функций учебного процесса со структурами психики ученика и преподавателя.

Для практического использования методологии структур качественной сложности в процессе подготовки преподавателей разработаны наглядные средства: демонстрационные таблицы, методические рекомендации к ним, образцы учебных пособий по ряду предметов (по арифметике, по алгебре, по геометрии, по английскому языку, по немецкому языку, по программированию) и обучающие компьютерные программы с элементами искусственного интеллекта.

Повышение эффективности процесса обучения. Повышение эффективности процесса обучения — одна из важнейших задач, стоящих перед педагогическими коллективами и перед каждым преподавателем и воспитателем.

Оценка деятельности по ее эффективности содержит несколько аспектов. Она характеризует всю деятельность или ее составные части по крайней мере в следующих направлениях: во-первых, это — величина, выражающая отношение теоретической (мыслимой, желаемой) возможности достижения цели к самой цели; во-вторых, в ней заключено суждение о степени полноты реализации выполняемой деятельности путем сверки с некоторым эталоном; в-третьих, это — информация об относительной ценности данного вида деятельности по ее соответствию общественным нормам или потребностям. Из сказанного со всей очевидностью следует, что *эффективность является особым качеством деятельности, посредством которого описывается некоторое множество отношений, присущих деятельности как целостному явлению и имеющих социальную значимость.* [12]

Качество эффективности присуще самой деятельности постольку, поскольку оно возникает в процессе ее осуществления. С указанной точки зрения *эффективность допустимо считать своего рода мерой деятельности*, и, следовательно, чтобы ее выявить, нужно знать, что такое деятельность и как она функционирует.[13]

Вполне понятно, что совокупность всех суждений, заключенных — в понятии эффективности — весьма велика, поскольку они соотнесены со всей деятельностью человека. Общая задача получения подобных знаний, по-видимому, может быть сведена к нескольким важнейшим процедурам, относящихся сначала к описанию деятельности, а затем — эффективности. Прежде всего должен быть зафиксирован определенный взгляд на природу и бытие самой деятельности, раскрыто понимание ее сущности. Далее, необходимо располагать идеализированным представлением о выполнении *деятельности, ведущей к определенной цели*, а также *получить исчерпывающую характеристику этой цели*, средством достижения которой выступает деятельность в каждом отдельном случае.[14]

Следующей процедурой является *определение связи между текущей деятельностью и планируемыми результатами*. Лишь после выполнения названных процедур, становится возможным выработать способы измерения и оценки эффективности.[15]

Наконец, когда установлены необходимые эвристики, зависимости и получены соответствующие знания, тогда мы вправе, применяя те или иные критерии, судить о влиянии различных существенных факторов на степень эффективности выполняемой деятельности, и на этой основе ставить вопрос о том, как изменить влияние выделенных факторов для повышения эффективности, ее оптимизации и др. Затем можно уже достаточно подробно составить алгоритмы процессов обучения (или любой деятельности).

---

[12] В. М. Блинов. *О дидактической трактовке понятия эффективности обучения*. Академия Педагогических Наук СССР. Для обсуждения на заседании Бюро Отделения дидактики и частных методик, М., 1977. Тираж 60 экз.

[13] Там же.

[14] Там же.

[15] Там же.

Таковы, по нашему мнению, главные исходные положения, которые лежат в основе подхода к суждению об эффективности и выполняют методологическую роль, когда рассматривается эффективность отдельных видов деятельности.

В каждом частном случае общее представление об эффективности трансформируется в зависимости от специфики рассматриваемого вида деятельности, решаемых задач, возможности измерения и др., вследствие чего конкретизируются и названные выше процедуры. Собственно говоря, *оценка эффективности любого вида деятельности становится научной проблемой уже потому, что нет готового рецепта получения нужных знаний при переходе от общенаучного* (*гносеологического*) *анализа деятельности к рассмотрению ее конкретных видов и форм проявления.* [16]

При этом происходит смена научной позиции и уровня абстрагирования, благодаря чему деятельность как бы поворачивается новой стороной, когда производится своеобразный "срез"в плоскости предмета данной науки.

В дополнение к сказанному выше следует подчеркнуть, что применение общенаучных методов (математических и др.) для определения эффективности всецело зависит от содержательной характеристики конкретного вида деятельности. Например, при оценке экономической эффективности, педагогической эффективности и др. Поэтому *попытки вести поиск различного рода количественных критериев для определения, например, педагогической эффективности до того, пока не будет выявлена специфика этой деятельности и ее эффективности, не могут увенчаться успехом.*[17]

Переходя к рассмотрению особенностей педагогической эффективности отметим, что мы касаемся пока данной проблемы с позиций лишь одной из педагогических дисциплин — дидактики, что накладывает известные ограничения. Поэтому *полная характеристика всей педагогической деятельности и ее эффективности не входит в нашу задачу*. Это более сложная и большая задача. Для нашей цели будет достаточно показать, в чем заключается переход в данную частную область научного познания, когда исследуется эффективность обучения. Вопрос о педагогической деятельности и ее эффективности будет затронут только в той мере, в какой это требуется для понимания ее специфики, т. е. в минималистском подходе. Остановимся в этой связи на особенности педагогической деятельности, сопоставляя ее по цели, средствам и результату с рассмотренным выше более общим представлением о человеческой деятельности.

Педагогической деятельностью в самом широком смысле можно назвать совокупность (*систему*) *всех видов специально организованного социального воздействия на человека с целью выработки у него качеств личности, соответствующих требующимся общественным нормам, а также с целью подготовки личности к выполнению общественно-необходимой творческой деятельности.*[18]

Важнейшим ориентиром в достижении этой цели для педагогики служат разработанные разнообразные теории философии, психологии и дидактики, реализуемые в деятельности положения о нравственном облике гармоничной личности. В отличие от любого другого вида деятельности педагогическая деятельность выступает

[16]Там же.
[17]Там же.
[18]Там же.

как особый, искусственно созданный механизм, инструмент, с помощью которого из поколения в поколение воспроизводится вся человеческая деятельность, весь накопленный опыт, вся культура. Именно поэтому педагогическая деятельность направлена чаще не на преобразование внешнего мира и воздействия носят не физический, предметный характер, а имеют информационно-знаковую природу, охватывая всю сферу деятельности человека (трудовая, научная, художественная и иные виды деятельности). В процессе педагогической деятельности, в конечном счете, видоизменяется и перераспределяется активность человека, трансформируются многие его структуры.

Составными частями педагогической деятельности являются ее разновидности: деятельность воспитания, деятельность образования и деятельность обучения. Если в этом плане говорить о *результатах педагогической деятельности*, то их можно охарактеризовать как совокупный продукт воспитания, образования и обучения.[19] Тогда «срез» личности по отношению к результатам педагогических воздействий правомерно рассматривать по уровню сформированности таких качеств как воспитанность, образованность и обученность. При этом имеется в виду следующее. *Воспитанность* показывает степень сформированности тех качеств личности, которые характеризуют направленность деятельности, выраженную в отношении к самой деятельности и к ее объекту. *Образованность* обозначает как границы, так и степень возможности выполнения личностью заданной деятельности. *В обученности* отражена степень подготовленности личности к выполнению общественно-значимой деятельности.

Основываясь на изложенном выше, *можно определить педагогическую эффективность как отношение между системой педагогических воздействий и сформированным уровнем воспитанности, образованности и обученности личности, с одной стороны, а с другой — как отношения между достигаемой степенью воспитанности, образованности и обученности и тем уровнем, который отвечает социальным нормам и запросам развитого общества.*[20]

Ограничимся сжатой характеристикой педагогической деятельности и ее эффективности, из которой видно преобразование исходного представления об этих явлениях. Придерживаясь намеченного выше подхода, *обратимся к дидактике, специальным объектом которой выступает не вся педагогическая деятельность, а лишь деятельность обучения.*[21]

В сфере данной науки совершается не только дальнейшее преобразование названных выше знаний, но и происходит известная конкретизация обобщенного представления о педагогической деятельности и эффективности. *Попытаемся показать своеобразие дидактического подхода к проблеме эффективности обучения, принимая за постоянно действующие все связи и опосредования между воспитанием, образованием и обучением, которые существуют в практической деятельности.*[22]

Уточнив прежде всего отправную позицию для описания обучения как особой разновидности педагогической деятельности. Как известно, в дидактике все более

[19]Там же.
[20]Там же.
[21]Там же.
[22]Там же.

упрочивается *взгляд на обучение как на социально-обусловленную системную деятельность, порожденную слиянием двух деятельностей — преподавания и учения.* Эта деятельность представляет собой целостное явление, ибо обучение нельзя свести ни к деятельности преподавания, ни к деятельности учения, ни к их сумме, это — качественно отдельное явление, которое, выступая объектом дидактики, может быть обозначено как учебная деятельность, имеющая свою содержательную и процессуальную характеристики.[23] Содержание, структура и функционирование этой деятельности как системы социально обусловлены прежде всего тем, что ее субъектом выступают не только отдельные люди, а все общество — коллективный субъект. Объектом деятельности обучения служит вся передаваемая деятельность и ее результаты, что осуществляется через людей, носителей деятельности. Подходя к обучению в этом аспекте, можно было бы также говорить и о реализуемых в этой деятельности воспитательных и образовательных функциях.

Сущность обучения достаточно полно раскрывается через особые отношения, которые возникают между деятельностями преподавания и учения, представляя собой разновидность отношений взаимодействия — учебное взаимодействие. Отношения взаимодействия, как известно, выражаются во взаимном влиянии явлений друг на о друга, когда причина и следствие постоянно меняются местами, т. е. между ними существует диалектическая связь.[24] Применительно к отношениям учебного взаимодействия, следует подчеркнуть, что учебная деятельность существует постольку, поскольку происходит непрестанное взаимодействие деятельностей преподавания и учения, которые обуславливают функционирование обучения. Если это взаимодействие нарушается или исчезает, то прекращается и обучение.

Основываясь на намеченном выше представлении об обучении как о деятельности, логично считать, что ее содержанием является информация о передаваемой деятельности и ее результатах. Рассмотрим несколько подробнее под этим углом зрения учебные действия, система которых образует учебную деятельность.

Большая часть всего предшествующего человеческого опыта сохранена не только в выполняемой обществом, людьми деятельности, но и в информации об этой деятельности и ее результатах, запечатленной в понятиях, суждениях и др., которые являются тем, что называют знаниями как об окружающей нас действительности, так и о самой деятельности. Опираясь на этот опыт, человек выполняет множество конкретных действий, направленных на преобразование тех или иных предметов, например, изготавливая станок, добывая уголь, открывая новые законы химии и др. Выполнение учебного действия не сопровождается изменениями предметов действительности, а если они и происходят, то носят подчиненный характер, действия — образцы, включаемые в обучение. Например, может демонстрироваться химическая реакция, изготовляться электронная установка, применяться математические формулы и т. д. Однако такого рода конкретные действия являются лишь условиями осуществления учебного действия, а не его целью. Учебное действие передает информацию о том, как нужно выполнять химическую, реакцию, как собирать электронную установку, где использовать математические формулы и др. *В обучении не просто передаются накопленные выводы и суждения или совершается демонстрация-*

[23] Там же.
[24] Там же.

показ некоторой совокупности образцов реальных действий, а происходит целенаправленное воссоздание деятельности, которая заранее препарирована на свои составные элементы по специальной программе, соответствующей логике воссоздания заданной деятельности. Таким образом, учебное действие — это особым образом преобразованный опыт, служащий цели его воссоздания.[25]

В представлении об учебном действии заключена определенная абстракция, поскольку мы отвлекаемся от конкретных людей, выполняющих роли обучаемого и обучающего, а рассматриваем отношение их деятельностей в форме определенных воздействий, каждое из которых имеет смысл лишь постольку, поскольку существует другое. Развивая эту мысль, справедливо предположить, что логика обучения как бы перекрывает логику воспроизводимого действия, и что получаемая обученность подчиняется следующей зависимости: *чем выше степень упорядоченности организации отношений между деятельностями преподавания и учения или соответствующими учебными воздействиями, а также и между самими учебными действиями, тем быстрее происходит рост степени обученности. Упорядоченность в данном случае понимается, во-первых, как наилучшее соответствие входящих в учебное действие воздействий преподавания и учения определенной программе, в которой с возможной точностью и степенью вероятности предусмотрена ориентированность на цель, и во-вторых, как согласованность воздействий между собой, выражающаяся в прогнозировании смены указанных воздействий или их чередования.*[26] Тут мы подходим к возможности использования цепочек качественной сложности для описания и формализации разных видов иерархий упорядоченных организаций.

Названные положения хорошо согласуются с тезисом о том, что случайный, вероятностный характер учения подвергается существенному изменению в условиях обучения. *Одна из важнейших функций обучения как раз и состоит в том, чтобы упорядочить организацию всей системы действий преподавания и учения, что имеет своим следствием перестройку учения, которое приобретает большую предсказуемость и детерминированность.*[27] А следующим шагом уже может стать подробная формализация процессов обучения.

Используя имеющиеся данные, а также проведя специальное исследование и педагогический эксперимент нам удалось подтвердить высказанное предположение, показав, что *переход от обучаемости к обученности происходит наиболее успешно при наилучшей организации учебных воздействий*, в указанном выше смысле.[28] Рассмотрев важнейшие черты учебной деятельности, проследим дальнейшую трансформацию понятия педагогической эффективности при описании ее в дидактике.

Из изложенного выше следует что *эффективность обучения — это одна из характеристик педагогической деятельности, которая позволяет судить о степени готовности личности к вхождению в социальную деятельность, т.е подразумевается, что достигнута определенная степень обученности.*[29] Которую необходимо измерять численно в каждом случае.

---

[25] Там же.
[26] Там же.
[27] Там же.
[28] Там же.
[29] Там же.

Однако такое определение в силу своей глобальности является недостаточным и поэтому требуется продолжить анализ, вытекающий из обрисованного выше представления об учебной деятельности и отношений учебного взаимодействия.

Так же как и в общем случае, *эффективность учебной деятельности может рассматриваться в трех аспектах как величина, выражающая отношение между: деятельностями преподавания и учения, текущими результатами и идеализированным представлением об обученности, реализуемой деятельностью и некоторым эталонным представлением о ней, выработанным в предмете дидактики.*[30]

Мы получаем здесь многоуровневую иерархическую модель-структуру, которую упрощенно можно представить как структуру взаимодействующих страт:

Страта 1: деятельности преподавания и учения; где a_1, a_2 и a_3 — текущие результаты преподавания и учения;

Страта 2: идеализированные представления об обученности; где b_1 и b_2 — эталонные представления о обученности.

Страта 3: отношения между a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2; выражающие численно эффективность учебной деятельности.

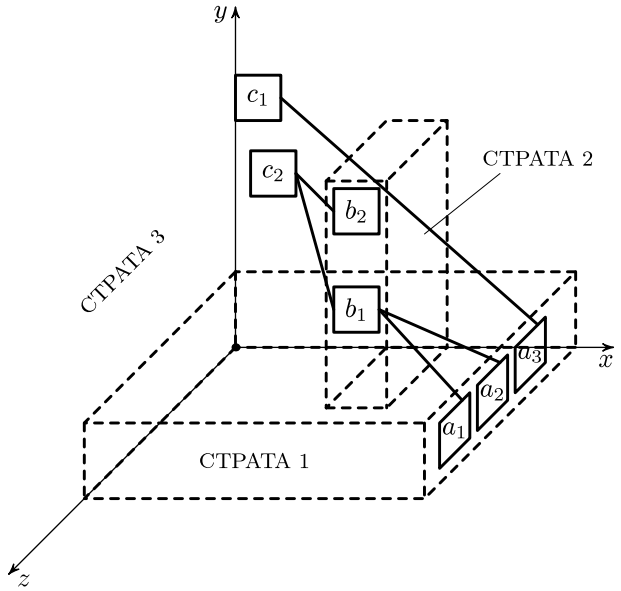


Рис. 2. Многоуровневые иерархические структуры

Одной из важные задач, возникающих при подходе к определению эффективности в дидактике, является, пожалуй, введение понятия педагогической эффективности в концептуальную систему понятий, используемых для описания учебной деятельности.

В разработанной нами с этой целью концептуальной модели был намечен круг таких базовых понятий как *учебная деятельность, учебные действия, действия преподавания, действия учения, учебные воздействия, циклы учебной деятельности, упражнения, операции, учебные ситуации, учебная информация, обучен-*

[30]Там же.

ность, степень обученности и ряд иных, посредством которых удается выполнить необходимую характеристику состава, структуры и функционирования учебной деятельности, для того чтобы выделить зависимость между организацией системы и достигаемыми результатами с одной стороны, а с другой — между текущими результатами и идеализированным представлением об обученности. На этой основе стало возможным определить эффективность обучения через названные выше понятия.[31]

При исследовании подготовленной модели на эмпирическом (экспериментальном уровне) нами был применен в качестве примера критерий эффективности, основанный на использовании параметров времени и точности обучения. Также и другие параметры, которые будут описаны ниже.

В ходе исследования была показана не только принципиальная, но и реальная возможность сочетания качественной и количественной характеристик для оценки зависимости между способом организации учебных действий и достигаемой обученностью, а также при выявлении динамики отношений между обученностью и эффективностью.[32]

Таким образом, был в достаточной степени подтвержден не только путь получения содержательных дидактических знаний об эфФективности обучения, но и произведено соответствующее описание в системе принятых понятий и предложены конкретные способы реализации эффективного обучения в некоторых учебных предметах (математика, программирование, обучение игре го, иностранные языки и др.).

Суммируя изложенное выше, возможно кратко *определить эффективность обучения как некоторую функциональную величину, характеризующую научное представление об обучении как особой деятельности с точки зрения оценки зависимости между ее содержанием, организацией и достигаемой результативностью, а также между текущими результатами и идеализированным представлением об обученности.* Из данного определения следует, что состав дидактических знаний, о чем шла речь в данной работе, должен включать указанные характеристики, если рассматривается эффективность обучения.[33]

Возникает естественный вопрос о значении данного подхода как для теории, так и для практики обучения, ответ на который может оказаться не самоочевидным.

Решение проблемы эффективности обучения в дидактике направлено прежде всего на выработку научно-обоснованного подхода для осуществления более объективной характеристики обученности как основного показателя результативности системы учебной деятельности, а также на разработку научных процедур измерения и численной оценки эффективности обучения, при этом нельзя не учитывать, что получаемые дидактические знания об эффективности обучения имеют фундаментальный характер, так как в них отображены кардинальные, глубинные свойства действительности обучения, составляющее сущность данного явления. В силу обобщенно-абстрактного характера этих знаний они остаются справедливыми для обучения математике, программированию, языкам и других дисциплин, которые являются частными формами проявления учебной деятельности. Сказанное, отнюдь, не принижает роли частных методик в решении проблемы эффективности

[31] Там же.
[32] Там же.
[33] Там же.

обучения, которая наиболее полно исследуется на конкретном материале каждой учебной дисциплины. Более того, методические знания являются необходимым опосредующим звеном между обобщенными дидактическими представлениями и практикой обучения.[34]

Отнесение дидактических знаний к разряду фундаментальных нисколько не отрицает и их прикладного значения, которое заключается не только в их связи с частными методиками, но и в выполнении подобной роли "внутри"самой дидактики. Эта функция знаний особенно ярко проявляется *при разработке проектов улучшенных (более эффективных) курсов обучения, при выборе или оценке методов обучения и т.п.* Кому, например, нужны такие методы, о которых заранее известно, что их применение не повышает эффективности обучения? Для того, чтобы составить суждение о пригодности того или иного метода до его практической проверки, возможно применить наличные знания, использование которых дает возможность прогнозировать его действенность. *Знания об эффективности обучения являются одним из подобных средств оценки методов обучения, например, для установления соответствия между получаемыми результатами и заданным уровнем обученности данному виду учебной деятельности и др.*[35]

Понятие, что прежде чем давать практические рекомендации об эффективности предлагаемого метода должна быть проведена специальная исследовательская работа, включающая *моделирование изучаемого объекта* и иные процедуры. В качестве общего вывода отметим, что не следует полностью отвергать возможность оценки эффективности обучения в практической деятельности педагогов. Утверждается лишь то, что в их распоряжении должны быть научные способы подхода к данному явлению и, что они должны получать научно-обоснованные рекомендации по этому поводу. Если же оценка эффективности, вырабатываемая на практике — эмпирическом уровне будет подверждена влиянию единичных несущественных факторов или, наоборот, будут приниматься во внимание слишком многие зависимости, то в результате суждение об эффективности будет односторонним, а подчас, неверным.[36]

Следует также отметить, что *когда в настоящее время подводят итоги успеваемости, сравнивая результаты по процентам полученных оценок, по баллам тестирования и др., то преждевременно категорично утверждать на этом основании о повышении или понижении эффективности обучения вследствие применения тех или иных приемов или методов обучения. В названных и других случаях измеряется и оценивается, в строгом смысле слова, не эффективность, а соответствие полученных оценок каким-то принятым нормам и требованиям, предъявляемым к данному виду учебной деятельности.*[37]

Из такого сравнения, если мы даже уверены в объективности полученных данных, вытекает только одно единственное-следствие: выполнены или не выполнены заданные требования (нормы).

Достаточно ясно, что сравнение оценок совершенно необходимо для практических целей, но оно далеко недостаточно для суждения об эффективности работы преподавателя и тем более об эффективности применяемых им приемов или об обучении в целом.

---

[34]Там же.

[35]Там же.

[36]Там же.

[37]Там же.

История и арифметики также

Арифметика (от греч. слов *число* и *искусство*) — часть математики, которая занимается изучением свойств определенных величин; в более тесном смысле арифметика есть наука о числах, выраженных цифрами, и занимается действиями над числами. Арифметика занимается изучением четырех основных действия с целыми и дробными числами и их практические применения: учение о пропорциях, возвышение в степень, извлечение квадратных и кубичных корней и решение численных уравнений.

Арифметика находится в тесной, неразрывной связи с алгеброй, которую Ньютон называл «общей арифметикой»; вот почему действия — возвышение в степени, извлечение корней и решения численных уравнений, относящиеся собственно к алгебре, было бы правильнее отнести к составу арифметики, рассматривая последнюю как техническую часть алгебры. Рассматривая возвышение в степень, как частный случай умножения и принимая во внимание, что при извлечении корней и решении численных уравнений мы производим какое-либо из четырех основных действий, некоторые математики силились ограничить арифметику лишь основными действиями, а именно: сложения, вычитания, умножения и деления, но подобное ограничение несправедливо, так как три второстепенных действия арифметики производятся в известном порядке, который составляет существенную часть каждого действия. Многие ученые затруднялись разграничением алгебры от арифметики; так как первая занимается теми же действиями, что и вторая. Приняв однако в соображение, что алгебра доказывает те правила, которыми арифметика руководствуется, и что алгебра имеет предметом преобразование действий одних в другие так, чтобы арифметике оставалось лишь исполнение самых простейших действий, можно таким образом утверждать, что алгебра есть обобщенная арифметика, которая, в свою очередь, есть наука о числах и свойствах вполне определенных величин. Кто первым выполнил арифметические действия и когда мы еще долго не узнаем точно. Заглянем в самые последние источники, описывающие древние народы и культуры.

Сейчас уже накопилось достаточно данных о том, что историю мира и многие науки необходимо переписать заново, т. к. они не отражают действительного положения вещей. Рассмотрим следующие факты:

— В Ведическом времяисчислении частичное разрушение мира, Пралая, происходит каждые 4 миллиарда 32 миллиона лет, приводя к катаклизмам. Откуда в древнем трактате, написанном несколько тысяч лет назад на санскрите – языке, варианте древнерусского языка, взялись такие числа и такая информация, если некоторые ученые полагают, что человек существует на Земле чуть более 3 миллионов лет.

— Значения основополагающих физических констант и соотношений сил в Природе как будто специально подобрано таким образом, чтобы во Вселенной могла возникнуть жизнь. Ученые признают, что вероятность случайности такой настройки равна нулю. Тогда можно говорить о существовании Бога или разумной вселенной.

— Высший разум космической иерархии сознающих духовных существ (Боги) направлял и направляет развитие человека по определенному пути и с определенной целью.

— В Калифорнии глубоко в тоннеле, в слоях, относящихся к эоценовому периоду (более 50 миллионов лет назад) нашли человеческие кости и предметы быта людей.

Седая Древность. Человек современного типа — европеоид, возник на Русской равнине, в самом ее центре — в Московском регионе и чуть южнее до Воронежа (поселение Сунгирь — 70 тыс. лет до н. э. и село Костёнки — более 52 тысяч лет до н. э.), развитие древнерусского языка началась 21000±3000 лет назад. [38]

«Наши предки — проторусы из стоянки Сунгирь знали элементы счета» [39] и геометрию.

Диски и круги, геометрически разделенные на равные 4, 6, 8, 20 и 12 секторов, являющиеся и в настоящее время типичными славяно-русскими символами, находят повсеместно по ареалу расселения древних русов. [40]

Также древнерусским ведунам были известны священные числа Мироздания (Природы): 3, 4, 5, 12 для построения объектов миров, например, они отражают пропорции молекулы воды, пропорции расстояний между планетами Солнечной системы, расстояния до некоторых звездных скоплений, священные числа: $\pi = 3,14159...$; $e = 2,71...$

«Археологические находки (российских и английских археологов) Сунгиря <...> свидетельствуют о существовании в 30-м тысячелетии до н. э. религии: анимизма, веры в загробную жизнь, тотемизма, магии, культа предков, почитания солнца и луны, лунного календаря и арифметического счета.»[41]

В 22—21 тыс. до н. э. часть популяции с Русской равнины отправилась через Уральские горы в Сибирь, далее затем в Китай и Индию. В Африке памятников ранее 9 тыс. лет до н. э. просто не найдено, их нет. Поэтому, широко разрекламированные отчеты о том, что генетические доказательства позволили ученым утверждать, будто все люди произошли от некой африканской Евы-обезьяны, которая жила 200 тысяч лет назад в Африке, на поверку оказались абсолютно некорректными, или полным враньем, однако, до сих пор ими продолжают дурачить людей. На самом деле изначально древний Белый человек населял регион между Северным Полюсом, Каспийским морем и Гималаями, но никак не Африку.

В 1980 г. Всемирный конгресс психологов констатировал инвариантность базовых структур мышления и познания у человека признавая неолитические северные истоки алгебры и геометрии древних цивилизаций. Формализация используется при изучении, исследовании, проектировании и эксплуатации. Математика появляется только после осознания и освоения этапа формализации исходных понятий и знаний о мире. М. Гимбутас доказала преемственность архаической греческой символики фигур и чисел от палеолитической символики Мезина. В современной Общей теории систем специалисты разных стран утверждают идею базового системообразующего значения числа 7, формализованного из законов мироздания еще за 20 тыс. лет до н. э. во время неолита на севере Европы.

[38] А. А. Тюняев, Древнейшая Русь, Сварог и сварожьи внуки, Российская Академия Наук, М.: «Белые альвы», 2011, с. 12

[39] Там же, с. 23

[40] Там же, с. 32

[41] Там же, с. 34

Астрономия является одной из древнейших наук, она непосредственно опирается на знания математики и законов Вселенной. Астрономия, как и все другие науки, возникла из практических потребностей человека. Кочевым племенам первобытного общества нужно было ориентироваться при своих странствиях, и они научились это делать по Солнцу, Луне и звездам. Первобытный земледелец должен был при полевых работах учитывать наступление различных сезонов года, и он заметил, что смена времен года связана с полуденной высотой Солнца, с появлением па ночном небе определенных звезд. Дальнейшее развитие человеческого общества вызвало потребность в измерении времени и в летосчислении (составлении календарей). Все это могли дать и давали наблюдения над движением небесных светил, которые велись в начале без всяких инструментов, были не очень точными, но вполне удовлетворяли практические нужды того времени. Из таких наблюдений и возникла паука о небесных телах - астрономия. С развитием человеческого общества перед астрономией выдвигались все новые и новые задачи, для решения которых нужны были более совершенные способы наблюдений и более точные методы расчетов. Эти потребности вызывали более серьезные исследования математики. Постепенно стали создаваться простейшие астрономические инструменты и разрабатываться более точные математические методы обработки наблюдений. Записи астрономических наблюдений, подлинность которых совершенно несомненна, относятся к VIII в. до н. э.

В исследовании Бориса Фролова о астрономии палеолита на основании данных палеолитической графики Сибири и Восточной Европы, астрономические даты соотносятся с периодом в 20 тысячелетий назад.

По мнению авторов авторитетного сборника по археастрономии большинство современных созвездий было известно и получило наименование в среднеминойский период (около 2000 лет до н. э.)

Распространение христианской религии повлекло за собой значительный упадок естественных наук, и развитие астрономии и математики в Европе затормозилось на многие столетия. В эпоху мрачного средневековья астрономы занимались лишь наблюдениями видимых движений планет и согласованием этих наблюдений с принятой геоцентрической системой Птолемея. Рациональное развитие в этот период астрономия получила лишь у арабов и народов Средней Азии, в трудах выдающихся астрономов того времени — Аль-Баттани (850-929 гг.), Бируни (973-1048 гг.), Улугбека (1394-1449 гг.) и др.

Древний Китай. Предки проторусов ранее 21 тыс. лет до н. э. двинулись в восточном направлении, этим и объясняется наличие гаплогруппы R1a в Северном Китае, и находки древних захоронений европеоидов. [42] Этим и объясняется скачкообразное появления культуры, наук, знаний и умений древних китайцев. В Древнем Китае за 2 тысячи лет до н. э. видимые движения Солнца и Луны были настолько хорошо изучены, что китайские астрономы могли предсказывать точную дату наступление солнечных и лунных затмений. Китайские ученые записывали числа в десятичной системе, использовали отрицательные числа.

[42] Там же, с. 26

Древняя Индия. Около 4750—4050 лет до н. э. на землю Индии ступили проторусы и до сих пор значительная часть индийцев имеет гаплогруппу крови R1a1, а в современной России более половины населения имеют эту гаплогруппу. Этим же периодом времени датируются общие предки иранского народа. [43]

Индус, потомственный брахман, Бал Гангадхар Тилак (1856—1920) посвятивший свою жизнь изучению Вед – священного, сохранившегося, древнейшего письменного трактата на Земле (записанного на санскрите во 2 тыс. до н. э. и передаваемым изустно до этого в течении нескольких тыс. лет) пишет в своей книге[44] «... выявил в Ведах астрономические указания на то, что стояние описанного в них созвездия Орион должно датироваться 4500 годом до н. э.»

Тексты Вед явно подтверждают исторический факт существования прародины ариев в арктическом регионе (в основном территория России). Расселение с севера предков всех народов-носителей индоевропейских языков[45] (*А.К.: и культуры*) подтверждают и большинство западных мифологов, лингвистов, фольклористов и историков.

Сопоставляя санскрит и разными языками, было обнаружено гораздо больше совпадений в однородной лексике в значениях и названиях гидронимов, теонимов и топонимов с русским языком. Приведем цитату из древнейшей, сохранившейся книги проторусов, «Влесова Книга»: «Идем в домы свои, где мы живем. Да святится имя Его — Индра. Потому как несет нас Бог мечей, Богов и Веды знающий. Так воспеваем мы мощь Его. <...> мы — Арийский народ, пришедший из земель Арийских в край Иньский.»[46] Поскольку путь на полуостров Индостан пролегал в основном через территорию Китая, то понятно, упоминание края Иньского. Иньская (Иньска) земля находилась в районе Синьцзян-Уйгурского автономного района (Синьцзян) расположенном на северо-западе Китая, прямо на юг от северной прародины русов — через Таймыр, Ямал, Обдор, Западную Сибирь, Алтай.[47]

Числа Фибоначчи — элементы числовой последовательности $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Последовательность Фибоначчи была хорошо известна в древней Индии, где она применялась древними ариями в метрических науках (просодии — стихосложении), намного раньше, чем она стала известна в Древнем Египте и в Европе и значительно позже ее изобретение приписали Фибоначчи. Её использовали при проектировании зданий и создании других объектов.

Древний Вавилон. В Северной Месопотамии сначала сформировалась первая европеоидная культура (т. е. ни евреи, ни арабы не были ее основателями) — хассунская культура (7—6 тыс. л. до н. э.) и культура Джармо (Ярмо, по-русски), при раскопках которых найдены сосуды, украшенные геометрической росписью и глиняные статуэтки Макоши, полностью аналогичные статуэткам с Русской равнины. [48] Влияние древнерусской культуры привнесло и владение математическими зна-

[43] Там же, с. 21

[44] Б. Г. Тилак, Арктическая родина в Ведах, М.: Гранд, 2001, с. 61

[45] Там же, с. 9

[46] Влесова книга, перевод Н. Слатина, Москва

[47] В. Дёмин, Е. Лазарев, Н. Слатин. Древнее древности. Российская протоцивизизация, М.: АиФ принт, 2004, с. 405

[48] А. Клесов, А. Тюняев, Происхождение человека, М.: Белые альвы, 2010, с. 872

ниями в Вавилоне более 5000 лет назад. Поскольку в древнем Вавилоне писали на гляняных табличках, поэтому и сохранилось около 150 записей с математическими задачами. Древние вавилоняне использовали 60-ричную систему счисления в сочетании с десятичной системой счисления. Число π у них было вычислено как 3,125. 1200 лет до н. э. халдейские и вавилонские жрецы, вторя древнерусским, уже делили путь Солнца (эклиптику) на 12 знаков зодиака. Данные языкознания также убедительно показывают, что к 5-му тыс до н. э. на территории Шумера европеоидное население шумеров являлось носителями проторусского языка древней формации — «праобщеиндоевропейского». [49]

Древний Египет. Поскольку фараоны древних египтян произошли путем переселения части проторусских народов с территории Русской равнины на территорию Египта, постольку первые династии фараонов состояли исключительно из праславянских представителей — светлокожих европеоидов атлантического типа. [50] Так что вся базовая культура Египта базируется на знаниях, переданных проторусами.

Но Платон и Диоген Лаэрций, не зная таких данных, говорят, что числа, арифметика и геометрия ниспосланы египтянам от их бога Тевта или Тота, владевшего торговлей и числами, подобно греческому Меркурию. Кто-то полагает, что арифметика была открыта халдейцами, а Страбон в своей «Географии», говорит, что современники его приписывали изобретение арифметики финикиянам, но и те и другие получили ее от прарусов. Поэтому все пропорции пирамид Египта содержат священные числа: 3, 4, 5, 6, 8, 12, 20.

Числа Фибоначчи знали и использовали в Древнем Египте. Если в этом ряду разделить одно из значений на предыдущее, например $\frac{21}{13} = 1{,}6153$, $\frac{144}{89} = 1{,}6179$, $\frac{610}{377} = 1{,}6180$ и т. д., то все они будут стремится к значению «золотого числа» 0,618.... Эти отношения и сам ряд были известны и Пифагору в Древней Греции. Обобщенные числа Фибоначчи или p-числа Фибоначчи ($p = 0, 1, 2, 3, \ldots$), возникающие при исследовании так называемых «диагональных сумм» Арийского треугольника (треугольника Паскаля), и задаваемые в рекуррентной форме, исследуются современными учеными и находят применение в разных науках и теориях. Интересные закономерности: наибольший общий делитель двух чисел Фибоначчи равен числу Фибоначчи с индексом, равным наибольшему общему делителю индексов. Суммы биномиальных коэффициентов на диагоналях треугольника Паскаля являются числами Фибоначчи.

В пирамидах отношения высоты к длине стороны основания равнялось $4 : 6$ или $\frac{2}{3}$ что соответствовало гармоничным пропорциям «золотого сечения».

Известно, что еще за 3 тысячи лет до н. э. египетские жрецы подметили, что разливы Нила, регулировавшие экономическую жизнь страны, наступали вскоре после того, как перед восходом Солнца на востоке появлялась самая яркая из звезд, Сириус, скрывавшаяся до этого около двух месяцев в лучах Солнца. Из этих наблюдений египетские жрецы довольно точно определили продолжительность тропического года. Папирус Райнда (1800 г. до н. э.) содержит 84 задачи. Египтянами использовалась десятичная система счисления. Египтяне умели решать линейные

[49] А. Клесов, А. Тюняев, Происхождение человека, М.: Белые альвы, 2010, с. 874

[50] Там же, с. 876

уравнения, знали операции с дробями и прогрессиями. Художники использовали метод ортогональных проекций.

Древняя Америка. Майя — цивилизация Центральной Америки, известная благодаря своей письменности, искусству, архитектуре, математической и астрономической системам. Начала формироваться в предклассическую эру (2000 г. до н. э. — 250 г. н. э.), большинство её городов достигло пика своего развития в классический период (250—900 гг. н. э.). Майя строили каменные города, многие из которых были покинуты задолго до прихода европейцев, другие были обитаемы и после. Календарь, разработанный майя, использовали и другие народы Центральной Америки. Применялась иероглифическая система письма, частично расшифрованная. Сохранились многочисленные надписи на памятниках. Создали эффективную систему земледелия, имели глубокие знания в области астрономии.

Потомками древних майя являются не только современные народы майя, сохранившие язык предков, но и часть испаноязычного населения южных штатов Мексики, Гватемалы, Гондураса. Некоторые города майя включены ЮНЕСКО в список объектов Всемирного наследия: Паленке, Чичен-Ица, Ушмаль в Мексике, Тикаль и Киригуа в Гватемале, Копан в Гондурасе, Хойя-де-Серен в Сальвадоре.

У древнего народа майя было две системы записи чисел. Одна система применялась в повседневной жизни. Вторая служила для календарных и астрономических расчетов и была позиционной двадцатеричной.

Исключительными интеллектуальными достижениями доколумбового Нового Света были созданные народом майя системы письма и исчисления времени. Иероглифы майя служили как для идеографического, так и для фонетического письма. Их вырезали на камне, рисовали на керамике, ими написаны складные книги на местной бумаге, именуемые кодексами. Эти кодексы являются важнейшим источником для исследования письменности майя. Фиксация времени стала возможна благодаря сочетанию письменности и основательных математических и астрономических знаний. В дополнение к этому майя использовали «цолкин» или «тоналаматль» — системы счёта, основанные на числах 20 и 13. Система цолкин, распространённая в Центральной Америке, очень древняя и не обязательно была изобретена народом майя. У ольмеков и в культуре сапотеков формативной эпохи сходные и достаточно развитые системы счисления времени сложились даже раньше, чем у майя. Однако майя в усовершенствовании числовой системы и астрономических наблюдениях продвинулись гораздо дальше, чем любой другой коренной народ Центральной Америки.

Первый открытый археологами на территории современного мексиканского штата Оахака монумент майя с высеченными на нём иероглифами относится приблизительно к 700 году н. э. Сразу после испанского завоевания письменность майя пытались расшифровать. Первыми исследователями письменности майя стали испанские монахи, которые пытались обратить майя в христианскую веру. Самым известным из них был Диего де Ланда, третий епископ Юкатана, который в 1566 году написал труд, названный «Сообщения о делах в Юкатане». По мнению де Ланды, иероглифы майя были сродни индоевропейским алфавитам. Он полагал, что каждый иероглиф представляет собой определённую букву.

Наибольшего успеха в расшифровке текстов майя добился советский учёный Юрий Кнорозов из ленинградского Института этнографии АН СССР, сделавший

свои открытия в 1950-е годы. Кнорозов убедился, что список де Ланды не был алфавитом, но он не отверг его полностью по этой причине. Учёный предположил, что «алфавит» де Ланды в действительности являлся списком слогов. Каждый знак в нём соответствовал определённой комбинации одного согласного с одним гласным. Соединённые вместе знаки были фонетической записью слов. Большой вклад в расшифровку иероглифов древних майя внесла и Татьяна Проскурякова.

В результате открытий XX века стало возможным систематизировать знания о письменности майя. Основными элементами системы письма служили знаки, которых известно около 800. Система счёта у майя базировалась не на привычной десятичной системе, а на распространённой в месоамериканских культурах двадцатиричной. При этом существовала структура в виде четырёх блоков по пять цифр. Также интересным является тот факт, что у майя существовало обозначение нуля, который схематически был представлен в виде пустой раковины от устрицы или улитки. Обозначение нуля также применялось для обозначения бесконечности. Так как нуль необходим во многих математических операциях, но в то же время в античной Европе был неизвестен, учёные предполагают сегодня, что майя имели высокоразвитую культуру с высоким уровнем образования.

Майя установили цикличный характер времени; их расчёты движения Венеры расходились с современными астрономическими данными всего на несколько секунд в год. Они представляли себе Вселенную, разделённую на три уровня — подземный мир, земля и небо. Религиозные ритуалы и церемонии были тесно связаны с природными и астрономическими циклами. Повторяющиеся явления подвергались систематическим наблюдениям, после чего отображались в различного рода календарях. По календарю майя, «время пятого Солнца» закончится 21—25 декабря 2012 года (зимнее солнцестояние). «Пятое Солнце» известно как «Солнце Движения».

В соответствии с Законом Времени основой Вселенной является Синхронный Порядок. Природа Времени — четвёртое измерение, время — это единая всеобщая частота синхронизации, формирующая все трёхмерные проявления и управляющая ими. Это универсальная частота синхронизации представляет собой неизменное соотношение, математически выраженное как 13:20 и отображённое в матрице галактической константы — в Цолькине.

Древние майя, считали свой календарь — Цолькин — «звёздным наследием», «священным календарём», дарующим возможность осознанного взаимодействия с силами Вселенной. «Цолькин» на языке майя означает «счёт кинов». Кин — это любой естественный цикл: один день, один год, тысяча лет. «Кином» майя также называли человека, Солнце, Планету, то есть кин — это любое целостное существо, многомерная модель отображения любого процесса в природе.

Цолькин, являясь галактическим алгоритмом, представляет собой соединение и взаимодействие нескольких составляющих: 13 чисел, 20 символов и пяти фрактальных наборов из четырёх кодовых цветов. Сочетания 13 Галактических Тонов Творения и 20 Солнечных Печатей создают 260 архетипов целостности и образуют матрицу Цолькина. Каждый из 260-ти кинов имеет свой порядковый номер, космологическое значение и обладает особыми качествами, цветом и энергиями, развёртывающимися в многомерной реальности. 260 дней Священного счёта образуют Галактический оборот. Календарь Нового Времени синхронизирует цикл в 365 дней с Галактическим оборотом в 260 дней. Цолькин является краеугольным камнем Майя Науки о Времени.

Календарь Цолькин интегрирует в себе два цикла — 13-дневный цикл Движения (Галактические Тоны — они соответствуют состояниям бытия) и 20-дневный цикл Меры (Солнечные Печати — специальные знаки, каждый из которых имеет свое имя и изображение, и воплощает собой определённые качества бытия): 13 Тонов Творения и 20 Солнечных Печатей. Когда волны проходят через все 20 качеств, от Дракона до Солнца, они снова возвращаются к началу гармонического ряда, и так на каждом витке сочетания Печатей и Тонов оказываются иными. Это создаёт своеобразный ритм, напоминающий пульсирующую фрактальную спираль.

Цикл Цолькина называют также «Галактическим Оборотом». Внутри священной 260-элементной матрицы существует много циклов, включая 1-дневный цикл Кинов, 4-дневный цикл Направлений, 13-дневный цикл Галактических Тонов, 20-дневный цикл Солнечных Печатей, 52-дневный цикл Замков и 65-дневный цикл Галактических Сезонов.

Поскольку Цолькин является 4-х мерным, он естественно фрактален и радиален. Фрактальность означает, что математическая модель Цолькина может представлять 260 дней, 26000 лет и другие кратные интервалы времени. Целое содержится в части. И если оно расширяется, пропорции сохраняются в неприкосновенности.

Цолькин — матрица потоков нелинейной энергии. Цолькин больше чем календарь — подобно Периодической Таблице всех 144 химических элементов Цолькин характеризует 260 частот галактических энергий. В таком контексте используют Цолькин как Календарь, но в действительности он много больше. Эти соотношения демонстрируют, что календарь 13-ти Лун по 28 дней полностью закодирован в Ткацком Станке Майя. Мы получили 13 комбинаций по 28, т. е.: $28 \cdot 13 - 364 + 1$ День Вне Времени $= 365$ дней.

Действительно, паттерн из 52 единиц являет собой Код. Именно поэтому мы говорим, что календарь 13-ти Лун по 28 дней воистину, совершенный календарь и весь календарь располагается в этой структуре. [51]

Ацтеки (самоназв. mexihcah) — индейская народность в центральной Мексике. Цивилизация ацтеков (XIV—XVI века) обладала богатой мифологией и культурным наследием. Столицей империи ацтеков был город Теночтитлан, расположенный на озере Тескоко (Тешкоко) (исп. Texcoco), там, где сейчас располагается город Мехико. Племя ацтеков пришло в долину Мехико с севера — скорее всего с земель, ныне принадлежащих США. В то время вся территория долины была поделена между местными племенами и, естественно, никто из них не хотел делиться землёй с пришельцами. Посовещавшись, местные вожди решили отдать пришельцам необитаемый остров на озере Тескоко. На острове водилось много змей, поэтому местные жители ожидали, что пришельцам на острове придётся несладко. Прибыв на остров, ацтеки увидели, что на нём обитает много змей, и очень этому обрадовались, поскольку змеи были их пищей. Уже в 1325 году на острове возник город Теночтитлан — ацтекская столица.

В Месоамерике и Южной Америке во времена рассвета ацтекского государства жертвоприношения были широко распространенным явлением; однако именно ацтеки практиковали их с особым размахом, принося в жертву людей в каждый из 18 праздников своего священного календаря.

[51] (http://yamaya.ru/maya/zolkin/)

Кровь занимала центральное место в культурах Месоамерики. Известно множество мифов, в которых боги науа жертвуют своей кровью ради помощи человечеству. В мифе о Пятом Солнце боги приносят себя в жертву, чтобы люди могли жить. (Все жертвы — для поддержания энергии солнца, которая, по мнению ацтеков, дает им жизнь.)

Существовали и другие типы человеческих жертвоприношений, в том числе и пытки. Ацтекские хроники описывают, как для сооружения главного храма было принесено в жертву около 84 400 пленников за четыре дня. Современный ученые считают эти цифры сильно завышенными.

Каждому богу требовался определенный тип жертвы: молодых девушек топили для Шилонена (аст. Xilonen), болезненных мальчиков жертвовали Тлалоку (аст. Tlaloc), говорящих на науатле пленников жертвовали Уицилопочтли (аст. Huitzilopochtli), а ацтека-добровольца — Тескатлипоке (аст. Tezcatlipoca). Впечатление от культуры ацтеков у нас совсем нехорошие.

Инки — индейское племя, обитавшее на территории Перу и создавшее незадолго до испанского завоевания обширную империю с центром в Куско, в перуанских Андах. Империя инков простиралась с севера на юг от Колумбии до Центрального Чили и включала в себя территории нынешних Перу, Боливии, Эквадора, севера Чили и северо-запада Аргентины. Индейцы называли Инкой лишь императора, а конкистадоры применяли это слово для обозначения всего племени, которое в доколумбову эпоху, по-видимому, пользовалось самоназванием «капак-куна» («великие», «прославленные»).

Культура инков сформировалась относительно поздно. Задолго до появления инков на исторической арене, еще в III тысячелетии до н. э., на побережье обитали оседлые племена, которые занимались изготовлением хлопковых тканей и выращивали маис, тыквы и бобы. Древнейшей из великих андских культур считается культура Чавин (12—8 вв. до н. э. – 4 в. н. э.). Ее центр, город Чавин-де-Уантар, расположенный в Центральных Андах, сохранял свое значение даже в инкскую эпоху. Позже на северном побережье развились другие культуры: государство Мочика (ок. 1 в. до н. э. – 8 в. н. э.), создавшее великолепные произведения архитектуры, керамики и ткачества. На южном побережье процветала загадочная культура Паракас (ок. 4 в. до н. э. – 4 в. н. э.), прославленная своими тканями, бесспорно самыми искусными во всей доколумбовой Америке. Паракас оказала влияние на раннюю культуру Наска, развивавшуюся южнее, в пяти долинах-оазисах. В бассейне озера Титикака ок. 8 в. сформировалась великая культура Тиауанако. Столица и церемониальный центр Тиауанако, расположенный на юго-восточной оконечности озера, выстроены из обтесанных каменных плит, скрепленных бронзовыми шипами. Знаменитые Ворота Солнца высечены из огромного каменного монолита. В верхней части проходит широкий барельефный пояс с изображениями бога Солнца, который истекает слезами в форме кондоров и мифологических существ. Государство Чиму, распространившее свою власть на протяжении 900-километровой линии перуанского побережья, имело разветвленную сеть высококачественных дорог. Таким образом, имея в прошлом древнюю и высокую культурную традицию, инки были скорее наследниками, нежели родоначальниками перуанской культуры.

Легендарный первый инка Манко Капак основал Куско приблизительно в начале 12 в. Город лежит на высоте 3416 м над у. м. в глубокой долине, пролегающей с севера на юг между двумя крутыми хребтами Анд. Как повествует предание,

Манко Капак во главе своего племени пришел в эту долину с юга. По указанию бога Солнца, своего отца, он швырнул золотой жезл себе под ноги и, когда тот был поглощен землей (добрый знак ее плодородия), основал в этом месте город.

Кечуа, язык инков, имеет очень отдаленное родство с языком аймара, на котором говорили индейцы, жившие вблизи озера Титикака. Неизвестно, на каком языке общались инки до того, как Пачакутек в 1438 возвел кечуа в ранг государственного языка. Благодаря политике завоеваний и переселений кечуа распространился по территории всей империи, и на нем по сей день говорит большинство перуанских индейцев.

Исторические события и предания сохраняли в памяти специально обученные сказители, передававшие мифы о седой древности. В мифах о древних индейских божествах — Виракоче и Пачакамаке — утверждается, что эти боги — белые бородатые люди, реальные исторические личности, высадились в древности у берегов священного озера Титикака. Они научили индейцев священным наукам: астрономии, математике, архитектуре, технологии строительства, медицине, методике управления государством, искусствам и многим другим.

В области материальной культуры самых впечатляющих свершений инки оставили в архитектуре. Хотя инкская архитектура уступает майяской по богатству декора и ацтекской — по эмоциональному воздействию, ей не найдется равных в ту эпоху ни в Новом, ни в Старом Свете по смелости инженерных решений, грандиозным масштабам градостроительства, искусной компоновке объемов. Инкские памятники, даже находящиеся в руинах, изумляют своим количеством и размерами. Представление о высоком уровне инкского градостроительства дает крепость Мачу-Пикчу, выстроенная на высоте 3000 м в седловине между двумя пиками Анд. Инки возводили здания на обработанных поверхностях скал, пригоняя каменные блоки друг к другу без известкового раствора, так что строение воспринималось как естественный элемент природного окружения. В случае отсутствия скальных пород использовались обожженные на солнце кирпичи. Инкские мастера умели резать камни по заданным образцам и работать с огромными каменными блоками. Крепость (пукара) Саскауаман, защищавшая Куско, — это, несомненно, одно из величайших творений фортификационного искусства. Длиной в 460 м, крепость состоит из трех ярусов каменных стен общей высотой 18 м. В циклопической кладке фундамента встречаются камни весом более 30 т со скошенными краями. На строительство крепости ушло не менее 300 000 каменных блоков. Все камни — неправильной формы, но пригнаны друг к другу так прочно, что стены выдержали бесчисленные землетрясения и сознательные попытки разрушения. Современные строители не смогли бы сейчас построить такую крепость. Даже спроектировать такую крепость сейчас смогла бы большая бригада архитекторов и строителей используя мощные компьютеры, как это было сделано в древности — неизвестно. Древние технологии, переданные белыми Богами уже утеряны.

Инки изобрели мнемоническое средство для хранения информации под названием «кипу» (букв. «узел»). Оно представляло собой веревку или палку, с которой свисали цветные шнурки с узелками. Содержавшуюся в кипу информацию устно пояснял специалист по узелковому письму, кипу-камайок, иначе она осталась бы непонятной. Каждый правитель провинции держал при себе множество кипу-камайок, которые вели дотошный учет народонаселения, воинов, податей. Инки пользовались

десятичной системой исчисления, у них существовал даже символ нуля (пропуск узелка).

До сих пор трудно понять, каким образом жалкая горстка испанцев могла завоевать мощную империю, хотя на сей счет выдвигается множество соображений. К тому времени ацтекскую империю уже завоевал Эрнан Кортес (1519—1521), но инки об этом не знали, поскольку не имели никаких прямых контактов с ацтеками и майя. О белых людях инки впервые услыхали в 1523 или 1525, когда некий Алехо Гарсия во главе индейцев племени чиригуано напал на сторожевой пост империи в Гран-Чако.

Европа. Первыми историческими математиками, сознательно излагавшими арифметику, как науку в Европе, должны быть признаны древние Этруски (*итал. etruschi*, *лат. tusci*, самоназв. *rasna*; (сравните со словом *русск*ие)) — древние племена предков русов, населявшие уже во втором тысячелетии до н. э. большую часть территории Апеннинского полуострова и создавшие развитую цивилизацию, предшествовавшую римской и греческой и оказавшую на них большое влияние. По мнению античных авторов, в формировании этрусского этноса принимали участие пеласги — древние русы-праславяне.

«В первом тысячелетии до н. э. большую часть территории Апеннинского полуострова, южной части Альп и побережья Адриатики занимали этруски. Они определяли развитие этого региона в последнем тысячелетии до н. э. и в первой половине 1-го тысячелетия новой эры. В период возникновения Рима территория этрусских городов простиралась от Альп, от Венето-Истрийского района до Помпеи. Это была *одна из самых развитых античных цивилизаций*. Уникальные особенности этрусской культуры — наличие письменности в современной буквенной форме, математики, наличие полноценной развитой религии, а также уникальная социальная и федеративная организация общества,— определили развитие этого региона и всей Европы на многие века.» [52]

Итак, древнему Риму, чья история и культура известны каждому выпускнику средней школы, предшествовала Этрурия или Этруская, культуру которой римляне называли «величайшей» и на которой они возводили фундамент всей Римской Империи. Именно этруски передали римлянам и древним грекам основания многих наук: математики, философии, религии, государственного и общественного строя.

Ученый и литератор Владимир Щербаков в книге «Дорогами тысячелетий» пишет: «Одна из древнейших фресок, найденной в Италии, изображает леопарда, сидящего на крупе коня. Этруски пришли в Италию из Малой Азии. В языке хеттов, населявших Малую Азию, можно найти корень «рас» или «раш» в слове «леопард». Этруски же называли себя расенами. Можно утверждать, что черная керамика, найденная недавно в малой Азии, близ Гордпона и датированная вторым тысячелетием до нашей эры, очень близка керамике этрусков — знаменитой буккеро...". В конце XI века лютого зверя «парда» упомянул в своем «Поучении» Владимир Всеволодович Мономах, предпоследний правитель единой киевской Руси, а «быстроногий русский пард» запечатлен на одной из берестяных грамот XII века. А слово «леопард» в современном русском языке образовано из двух слов — «лео» (лев) плюс «пардус» (пард). Многие, как правило, не задумываются над смыслом и происхож-

[52] `http://zavtra.ru/cgi/veil/data/zavtra/02/441/71.html`

дением слов родного языка, превосходно понимая их значение... Научная гипотеза «о родстве русского и этрусского языков, русской и этрусской культур» вполне состоятельна, и на сегодняшний день подтверждена фактами. Этруски были одним из прарусских народов. Древнерусская мифология повествует о космическом происхождении древних русов.

У Этрусков цифры появились гораздо ранее чем 1000 лет до н. э. Дионисий Галикарнасский в «Римских древностях», (1.17–30) цитирует более раннего историка V в. до н. э., Гелланика с Лесбоса, который сообщал, что пеласги были изгнаны греками и под предводительством своего царя Нана, сына Тевтамида, переправились к устью реки По (область — древняя Этрурия, современная Тоскана). Астрономические наблюдения проводились регулярно уже в 11 тыс. до н. э.

Древняя Греция. Далее математику развивали греки, а именно: Евклид (7–10 книги его «Элементов»), Диофант — математик IV ст. до Р. Х. (оставил после себя 13 трактатов, из которых до нас дошло 6 и Никомах, живший в I веке до Р. Х. В их сочинениях мы встречаемся с двумя различными терминами: *logistikh* — логистика, так наз. «числительное искусство» и *arihmhtekh* — арифметика — наука о свойствах чисел; очевидно, что древние греки различали особенными именами практическую часть арифметики от теоретической.

Греки, обогатив арифметику, заимствованную ими, от этрусков и египтян, передали ее через Александрийскую школу римлянам и арабам, от которых она начинает проникать повсюду лишь в эпоху Возрождения. Открытие книгопечатания в Европе оказало немаловажную услугу распространению первоначальных истин арифметики. В Древней Греции астрономия была уже одной из наиболее развитых наук. Для объяснения видимых движений планет греческие астрономы, крупнейший из них Гиппарх (II в. до н. э.), создали геометрическую теорию эпициклов, которая легла в основу геоцентрической системы мира Птолемея (II в. н. э.). Будучи принципиально неверной, система Птолемея тем не менее позволяла предвычислять приближенные положения планет на небе и потому удовлетворяла, до известной степени, практическим запросам в течение нескольких веков. Системой мира Птолемея завершается этап развития древнегреческой астрономии.

Насколько медленно проникали во всеобщее сознание эти истины до эпохи Возрождения, видно из того факта, что даже у арабов, ревностных носителей «математический цивилизации», всякий знавший едва четыре основных действия арифметики, считался ученым математиком; при всем том число подобных ученых было весьма ограничено.

Опять Европа. Джордж Пикок, профессор кембриджского университета, приводит в своей статье об арифметике для “Encyclopedia metropolitana of pure mathematics” прекрасные данные о системах счисления даже у диких племен, и там мы встречаем десять различных слов у каждого наречия, которые служат основанием счисления. Объяснения подобного совпадения систем должно искать в факте наличности десяти пальцев у человека, который, на первых ступенях своего развития, естественно, прибегал к своим пальцам для выражения числа.

Как мы уже упоминали, письменное счисление десятью цифрами получило свое начало в Древней Европе на территории Руси, затем было передано на Восток, а именно: индусам, которые передали свое искусство для усовершенствования арабам,

изучившим творения греков по «числительному искусству». Вполне достоверно, на основании дошедших до нас памятников, что арабы еще в конце X века совершенно понимали употребление 10 цифр и не могли не сообщить своего знания всем народам, с которыми имели сношения.

В начале XI века мавры (арабы), овладевшие Испанией, прилежно занимались там математикой и особенно «логистикой» греков и послужили, таким образом, впоследствии такими же наставниками по математике для христианского мира, как египтяне для греков. С появлением цифр в переводе Птолемеева «Алмагеста», изданном в Испании в 1136 г., индийское (так назыв. ныне арабское) знакоположение делается употребительнейшим между учеными. В общежитии, однако, римские цифры господствовали до половины XV в., когда наступает некоторым образом эпоха смешения римских и арабских знаков; мало-помалу римские знаки уступают место арабским, среди ученых, благодаря которым арабские и делаются всеобщим достоянием.

С открытия же книгопечатания стали чаще появляться монографии и трактаты по арифметике, которые хотя не вносили ничего нового в арифметику, унаследованную от арабов и греков, но вместе с тем получался толчок к усовершенствованию древних методов. В 1478 г. была напечатана в С.-Альбанс одно из выдающихся сочинений по арифметике, под заглавием: “Rhetorica nova Gulielmi de Saona”, в которой с особой ясностью изложены простейшие действия арифметики или «Алгоризма», как еще называли греки арифметику. Почти одновременно, в 1484 году, вышло прекрасное сочинение итальянца Лукаса де Бурго: “Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita”, в котором арифметике посвящен длинный обзор состояния этой науки до конца XV-го столетия.

Если заглянуть в книги по истории науки, то можно прочитать про людей, изучивших математику почти самостоятельно и знавших её очень глубоко. Опишем путь в математике некоторых из них, поскольку именно выдающиеся личности всегда продвигают развитие прогресса.

Никколо Тарталья (итал. Niccolo Fontana Tartaglia, 1499—1557) — итальянский математик. Родился в Бреши. Истинная фамилия — Фонтана (Fontana). 14-ти лет он был отдан в обучение публичному писцу, но так как мать его не могла аккуратно платить учителю, то Тарталья должен был прекратить учение в самом начале. Обладая большой настойчивостью и терпением, он научился читать сам. Пристрастившись к математике, *самостоятельно, по книгам*, он достиг того, что стал сам преподавать другим и впоследствии стал известным математиком своего времени. В оставленных Тартальей сочинениях он рассматривает не только вопросы математики, но и некоторые вопросы практической механики, баллистики и топографии. По словам Тартальи, он самостоятельно открыл общий алгоритм решения кубических уравнений, несколько ранее найденный Сципионом дель Ферро. В 1539 году Тарталья передал описание этого метода Дж. Кардано

Джероламо (Джироламо) **Кардано** (лат. Hieronymus Cardanus, итал. Girolamo Cardano, Gerolamo Cardano; 24 сентября 1501 — 21 сентября 1576) — итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог. В его честь названы открытые Сципионом дель Ферро формулы решения кубического уравнения (Кардано был их первым публикатором), карданов подвес и карданный вал. Учился в университетах Павии и Падуи. Занимался сначала исключительно медициной (получил диплом доктора в 1525 году), *занимался сам по книгам математикой*, и так успешно, что

в 1534 году стал профессором математики в Милане. Позже Кардано преподавал математику в Болонье, хотя врачебное занятие не бросил и завоевал репутацию одного из лучших европейских врачей. Подрабатывал также составлением астрологических альманахов и гороскопов. Помогал Леонардо да Винчи осваивать математику. Кардано внёс значительный вклад в развитие алгебры: его имя носит формула Кардано для нахождения корней кубического неполного уравнения вида $x^3 + ax + b = 0$. Он же первым в Европе стал использовать отрицательные корни уравнений. В действительности Кардано не открывал этот алгоритм. Он признаётся, что узнал формулу от Никколо Тартальи. В историю криптографии Кардано вошёл как изобретатель несложного шифровального устройства, получившего название «решётка Кардано» (квадрат с вырезанными клетками).

Леонардо да Винчи — итальянский живописец, скульптор, архитектор, инженер, техник, ученый, анатом, ботаник, музыкант, философ эпохи Высокого Возрождения Леонардо да Винчи родился 15 апреля 1452 в местечке Винчи, недалеко от Флоренции.

В 4 года его забрали в семью отца, где он получил начальное образование: чтение, письмо, математика, латынь. В 1467-1472 Леонардо обучался у Андреа дель Верроккио — одного из ведущих художников того периода — скульптора, бронзолитейщика, ювелира, устроителя празднеств, одного из представителей Тосканской школы живописи. Талант Леонардо-художника был признан учителем и публикой, увидев работу ученика, Верроккио сказал, что «его превзошли и отныне все лица будет писать только Леонардо».

Он овладевает несколькими техниками рисунка: итальянский карандаш, серебряный карандаш, сангина, перо. В 1472 Леонардо был принят в гильдию живописцев — гильдию Святого Луки. Собственную мастерскую во Флоренции он открыл между 1476 и 1478 годами.

В 1482, получив приглашение ко двору правителя Милана Лодовико Сфорца, Леонардо да Винчи неожиданно уехал из Флоренции. Первоначально герцог взял его в качестве устроителя придворных праздников, для которых Леонардо придумывал не только маски и костюмы, но и механические „чудеса". За жалование меньшее, чем у придворного карлика, в замке герцога Леонардо исполнял обязанности военного инженера, гидротехника, придворного художника, позднее — архитектора и инженера. Одновременно Леонардо „работал на себя", занимаясь несколькими направлениями науки и техники одновременно.

Леонардо да Винчи было поручено основать в Милане академию художеств. Для преподавания он составил трактаты о живописи, свете, тенях, движении, теории и практике, перспективе, движениях человеческого тела, пропорциях человеческого тела. В 1495 году по просьбе Лодовико Сфорца Леонардо начал рисовать свою „Тайную вечерю" на стене трапезной доминиканского монастыря Санта Мария делле Грацие в Милане.

Леонардо да Винчи выработал уникальный режим сна: он спал небольшими интервалами в течение суток, а не всю ночь и за сутки получалось менее 8 часов сна, этим он экономил время для самосовершенствования. Он был вегетарианцем. Леонардо да Винчи был прекрасно сложен, обладал огромной физической силой: мог голыми руками согнуть железную кочергу, обладал практическими познаниями в рыцарских искусствах, верховой езде, танцах, фехтовании. В математике его привлекало только то, что можно увидеть и применить сразу на практике, поэтому

для него она прежде всего состояла из геометрии и законов пропорции. Леонардо да Винчи пытался определить коэффициенты трения скольжения, изучал сопротивление материалов, занимался гидравликой, моделированием.

Леонардо был не только выдающимся живописцем, инженером и архитектором, но и филологом. В кодексе «Trivulziano», в манускриптах «H» и «J», в «Атлантическом» кодексе собран огромный материал для какого-то универсального филологического труда, глубина и обширность которого поразили исследователей. То ли это опыт трактата по философии языка, то ли латино-итальянский словарь и грамматика, то ли попытки создать точную и ёмкую терминологию, для описания своих опытов... Язык записей Леонардо очень хорошо передаёт всю полноту его многогранной натуры, непостижимый сплав энергий ясного проницательного ума и бури сильных и ярких чувств.

Кроме того, среди современников Леонардо считался одним из лучших знатоков поэзии Данте, а знание и понимание Данте было в годы жизни Леонардо своеобразным аттестатом высшей литературной зрелости.

Леонардо да Винчи — гений, чьи изобретения, безраздельно принадлежат как прошлому, настоящему, так и будущему человечества. Он жил, опережая время, и если хотя бы малая часть того, что он изобрел, была воплощена в жизнь, то история Европы, а возможно и мира, была бы другой: уже в 15 веке мы разъезжали бы на автомобилях и пересекали бы моря на подводных лодках, прыгали бы с летающих повсюду самолётов с парашютов.

Леонардо да Винчи обогатил проницательными наблюдениями и догадками почти все области знания.

Леонардо «изобретателем», т. е. инженером, и, пожалуй, были правы те, кто называл его величайшим инженером из всех, кого знала история. Историки техники насчитывают сотни изобретений Леонардо, рассеянных по его тетрадям в виде чертежей, иногда с короткими выразительными ремарками, но часто без единого слова пояснения. Часто чертежи повторяются, уже описанные приспособления модифицируются и совершенствуются, причем подчас это происходит через многие годы, что свидетельствует о серьезном отношении конструктора. Упомянем некоторые изобретения Леонардо: приспособления для преобразования и передачи движения (например, стальные цепные передали, и сейчас применяемые в велосипедах); простые и переплетенные ременные передачи; различного вида сцепления (конические, спиральные, ступенчатые); роликовые опоры для уменьшения трения; двойное соединение, называемое теперь «кардановым» и применяемое в автомобилях; различные станки (например, точный станок для автоматического нанесения насечки или молотобойная машина для формовки слитков золота); приспособление для улучшения четкости чеканки монет; скамья для опытов над трением; подвеска осей на расположенных вокруг нее подвижных колесах для уменьшения трения при вращении (это приспособление, вновь изобретенное Атвудом в конце XVIII века, привело к современным шариковым и роликовым подшипникам); приспособление для опытной проверки сопротивления металлических нитей растяжению; многочисленные ткацкие машины (например, стригальная, сучильная, чесальная); механический ткацкий станок и прядильная машина для шерсти; боевые машины типа танков; различные музыкальные инструменты.

Но, как это часто бывает, признание к гениям приходит спустя века: многие его изобретения были дополнены и модернизированы, а сейчас используются в повсе-

дневной жизни. Наиболее дерзновенной мечтой Леонардо-изобретателя, без сомнения, был полет человека.

Одной из самых первых (и самых известных) зарисовок на эту тему является схема устройства, которое в наше время принято считать прототипом вертолета. Леонардо исследовал и описал с удивительной точностью полет птиц. Он знал, что давление воздуха на нижнюю поверхность крыльев создает силу, которую теперь называют подъемной; он исследовал анатомию летательных органов, сопротивление воздуха и динамическую роль центра тяжести для движения. Он так определял план исследований: «Если хочешь говорить о таких вещах, ты должен в первой части определить природу сопротивления воздуха; во второй — строение птицы и ее оперения; в третьей — действие этого оперения при различных движениях; в четвертой — роль крыльев и хвоста». Именно этот сознательный метод научного исследования и является главной заслугой Леонардо.

После долгого и внимательного изучения полета птиц, которое он начал еще во время пребывания в Милане, Леонардо спроектировал в 1490 г., а возможно, и построил первую модель летательного аппарата. Эта модель имела крылья, как у летучей мыши.

Пророческим оказался чертеж устройства, которое несколько веков спустя получило название «парашют». Первые спуски с парашютом совершили французы — инженер Веранцио (с крыши высокой башни в 1617 году) и воздухоплаватель Гарнеран (с воздушного шара в 1797 году). Эту идею Леонардо довел до логического конца лишь русский изобретатель Котельников, создавший в 1911 году первый ранцевый спасательный парашют, крепившийся к спине пилота.

К тем областям, которые были интересны Леонардо да Винчи относились акустика, анатомия, астрономия, аэронавтика, ботаника, геология, гидравлика, картография, математика, механика, оптика, конструирование оружия, гражданское и военное строительство, планировка городов. Умер Леонардо да Винчи 2 мая 1519 в замке Клу недалеко от Амбуаза (Турень, Франция).

Пьер де Ферма (фр. Pierre de Fermat, 17 августа 1601 — 12 января 1665) — французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, но страстно влюбленный в математику, изучавший ее всю жизнь. Блестящий полиглот. Наиболее известен формулировкой Великой теоремы Ферма.

С начала XVI-го века появляются все чаще мемуары по арифметике, обогащенные новыми сведениями, сравнительно с арабскими и унаследованными от Диофанта. Так, в 1686 г. вводятся десятичные дроби Симоном Стевином — весьма существенное прибавление к так называемому Алгоризму.

Голландец Альберт Жирар почти одновременно распространяет наше письменное счисление на десятичные дроби, а англичанин Райт в 1616 г. заключил даже в скобки сложные знаки; в следующем же году, знаменитый Непер доводить знакоположение арифметики до нынешнего ее состояния. Одной из самых интересных страниц истории арифметики должно признать вопрос о счислении. Сведения, собранные различными исследователями этого важного вопроса, сводятся к тому заключению, что почти у всех народов, спокон веков, была принята система десятеричного счисления.

Блез Паскаль (1623-1662) — французский математик, физик, религиозный философ и писатель. Блез Паскаль родился в Клермоне 19 июня 1623 года. Вся семья

Паскалей отличалась выдающимися способностями. Что касается самого Блеза, он с раннего детства обнаруживал признаки необыкновенного умственного развития.

Имея много свободного времени, отец, Этьен Паскаль специально занялся умственным воспитанием сына. Он сам много занимался математикой и любил собирать у себя в доме математиков. Но, составив план занятий сына, он отложил математику до тех пор, пока сын не усовершенствуется в латыни, в истории мира и других науках. Юный Паскаль просил отца объяснить, по крайней мере, что за наука геометрия? «Геометрия, — ответил отец, — есть наука, дающая средство правильно чертить фигуры и находить отношения, существующие между этими фигурами». Каково же было удивление отца, когда он нашел сына, самостоятельно пытающегося доказать свойства треугольника. Отец дал Блезу Евклидовы «Начала», позволив читать их в часы отдыха. *Мальчик прочел Евклидову «Геометрию» сам, ни разу не попросив объяснения.*

Собрания, проходившие у отца Паскаля и у некоторых из его приятелей, имели характер настоящих ученых заседаний. Раз в неделю математики, примыкавшие к кружку Этьена Паскаля, собирались, чтобы читать сочинения членов кружка, предлагать разные вопросы и задачи. Иногда читались также присланные заграничными учеными записки. С шестнадцатилетнего возраста молодой Блез Паскаль также стал принимать деятельное участие в занятиях кружка. Он был уже настолько силен в математике, что овладел почти всеми известными в то время методами, и среди членов, наиболее часто представлявших новые сообщения, он был одним из первых. Очень часто из Италии и Германии присылались задачи и теоремы, и если в присланном была какая-либо ошибка, Паскаль одним из первых замечал ее.

Шестнадцати лет Блез Паскаль написал весьма примечательный трактат о конических сечениях, то есть о кривых линиях, получающихся при пересечении конуса плоскостью, — таковы эллипс, парабола и гипербола.

Блез Паскаль с 1655 вел полумонашеский образ жизни. В «Мыслях» Паскаль развивает представление о трагичности и хрупкости человека, находящегося между двумя безднами — бесконечностью и ничтожеством (человек — «мыслящий тростник»). Сформулировал одну из основных теорем проективной геометрии. Работы по арифметике, теории чисел, алгебре, теории вероятностей. Он один из основоположников гидростатики, установил ее основной закон (Закон Паскаля). Работы по теории воздушного давления. Блез Паскаль сконструировал (1641 — 1642) суммирующую машину — прообраз компьютера. Во время чрезмерных работ над изобретенной им арифметической машиной расстроилось здоровье Паскаля. Придуманная Паскалем машина была довольно сложна по устройству, и вычисление с ее помощью требовало значительного навыка. Со времени изобретения Блезом Паскалем арифметической машины имя его стало известным не только во Франции, но и за ее пределами.

По тем открытиям, которые были сделаны Паскалем относительно равновесия жидкостей и газов, следовало ожидать, что из него выйдет один из крупнейших экспериментаторов всех времен.

Некто кавалер де Мере страстно любил играть в кости. Он и поставил перед Блезом Паскалем и другими математиками две задачи. Первая: как узнать, сколько раз надо метать две кости в надежде получить наибольшее число очков, то есть двенадцать; другая: как распределить выигрыш между двумя игроками в случае неоконченной партии.

Математики привыкли иметь дело с вопросами, допускающими вполне достоверное, точное или, по крайней мере, приблизительное решение. Здесь предстояло решить вопрос, не зная, который из игроков мог бы выиграть в случае продолжения игры? Ясно, что речь шла о задаче, которую надо было решить на основании степени вероятности выигрыша или проигрыша того или другого игрока. Но до тех пор ни одному математику еще не приходило в голову вычислять события только вероятные. Казалось, что задача допускает лишь гадательное решение, то есть что делить ставку надо совершенно наудачу, например, метанием жребия, определяющего, за кем должен остаться окончательный выигрыш.

Необходим был гений Паскаля и Ферма, чтобы понять, что такого рода задачи допускают вполне определенные решения и что «вероятность» есть величина, доступная измерению.

Первая задача сравнительно легка: надо определить, сколько может быть различных сочетаний очков; лишь одно из этих сочетаний благоприятно событию, все остальные неблагоприятны, и вероятность вычисляется очень просто.

Вторая задача значительно труднее. Обе были решены одновременно в Тулузе математиком Ферма и в Париже Паскалем. По этому поводу в 1654 году между Паскалем и Ферма завязалась переписка, и, не будучи знакомы лично, они стали лучшими друзьями. Ферма решил обе задачи посредством придуманной им теории сочетаний. Решение Паскаля было значительно проще: он исходил из чисто арифметических соображений. Нимало не завидуя Ферма, Паскаль, наоборот, радовался совпадению результатов и писал: «С этих пор я желал бы раскрыть перед вами свою душу, так я рад тому, что наши мысли встретились. Я вижу, что истина одна и та же в Тулузе и в Париже».

Работам над теорией вероятностей помогло знание Паскаля: арифметический треугольник, открытый много веков назад, позволяющий заменять многие весьма сложные алгебраические вычисления простейшими арифметическими действиями.

Однажды ночью мучимый жесточайшей зубною болью ученый стал вдруг думать о вопросах, касающихся свойств так называемой циклоиды — кривой линии, обозначающей путь, проходимый точкой, катящейся по прямой линии круга, например колеса. За одной мыслью последовала другая, образовалась целая цепь теорем. Изумленный ученый стал писать с необычайной быстротою. Все исследование было написано в восемь дней, причем Паскаль писал сразу, не переписывая. Две типографии едва поспевали за ним, и только что исписанные листы тотчас сдавались в набор. Таким образом, явились в свет последние научные работы Паскаля. Это замечательное исследование о циклоиде приблизило Паскаля к открытию дифференциального исчисления, то есть анализа бесконечно малых величин, но все же честь этого открытия досталась не ему, а Лейбницу и Ньютону.

«Мысли» Паскаля часто сопоставляли с «Опытами» Монтеня и с философскими сочинениями Декарта. Блез Паскаль умер 19 августа 1662 года, тридцати девяти лет от роду. (Самин Д. К. 100 великих ученых. - М.: Вече, 2000)

Семья Бернулли из поколения в поколение старалась отвлечь свою молодежь от науки и обратить ее дарования на коммерческую деятельность или адвокатуру. К счастью, молодежь сама выбирала свои пути, не очень считаясь с желаниями старших. Среди Бернулли некоторые имена повторяются из поколения в поколение, поэтому их различают, как королей, присоединив к имени соответствующую цифру.

Подробнее опишем жизненный путь Якоба I. Родился он 27 декабря 1654 г. По желанию отца готовился к званию протестантского священника. Окончил Базельский университет, где изучал философию, богословие и языки. Владел немецким, французским, английским, итальянским, латинским и греческим языками. Испытывая непреодолимое влечение к математике, *изучал ее* тайком от отца *по разным книгам*. В 1671 г. получил степень магистра философии. *В то же время продолжал пополнять свои знания по математике без учителя, почти без учебников.* (в то время учебников почти еще и не было) В октябре 1686 г. оказывается вакантной должность профессора математики в Базельском университете. Успехи Якоба в математике уже к тому времени хорошо известны, и Сенат университета единодушно выдвинул его на вакантную должность.

В том же году Якоб Бернулли прочитал в «Acta Eruditirum» за 1684 г. «Новый метод» Лейбница и, обнаружив трудные места, письменно обратился к Лейбницу за разъяснением. Лейбниц, находившийся в длительной служебной поездке, получил письмо только через три года, когда надобность в консультации отпала: Якоб совместно Иоганном *овладели дифференциальным и интегральным исчислениями самостоятельно* настолько, что вскоре смогли приступить к систематическому развитию метода. Образовавшийся триумвират — Лейбниц, Якоб и Иоганн Бернулли — менее чем за двадцать лет чрезвычайно обогатил анализ бесконечно малых.

С 1677 г. Я. Бернулли стал вести записные книжки, куда вносил различного рода заметки научного содержания. Основное место в записных книжках занимает решение математических задач. Уже по ранним записям можно судить о проявленном Я. Бернулли интересе к прикладной математике. Математические заметки показывают, как постепенно Я. Бернулли *самостоятельно, без учителей (!) овладевал методами Валлиса, Декарта, другими сложными методами, как развивал и совершенствовал их*. Решенные им задачи служили отправными пунктами для дальнейших более глубоких исследований. В январе 1684 г. Я. Бернулли провел в Базельском университете открытый диспут, на котором защищал 100 тезисов, из них 34 логических, 18 диалектических и 48 смешанных. Показав высочайший уровень владения самыми современными на то время математическими и логическими методами, многие из которых он сам же и разработал.

Даниил Бернулли (1700–1782), швейцарский физик-универсал и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики. Академик и иностранный почётный член (1733) Петербургской академии наук, член Академий: Болонской (1724), Берлинской (1747), Парижской (1748), Лондонского королевского общества (1750).

Даниил родился в Гронингене (Голландия), где его отец тогда преподавал математику в университете. С юных лет увлёкся математикой, вначале учился у отца и брата Николая, параллельно изучая медицину. После возвращения в Швейцарию подружился с великим математиком Эйлером.

Более всего Даниил Бернулли прославился трудами в области математической физики и теории дифференциальных уравнений — его считают, наряду с Д'Аламбером и Эйлером, основателем математической физики.

В математике опубликовал ряд исследований по теории вероятностей, теории рядов, численным методам и дифференциальным уравнениям. Он первый применил математический анализ к задачам теории вероятностей (1768), до этого использовались только комбинаторный подход. Бернулли продвинул также математическую

статистику. Итак, Бернулли в совершенстве владел математикой и физикой. Знал прекрасно и медицину. Вы скажете, ну, так это сам Бернулли, а я обычный человек. Ну, так изучи математику хотя бы в объеме спецшколы, докажи себе, что ты тоже чего-то стоишь, что ты можешь добиться поставленной цели. И у тебя, дорогой читатель, всё необходимое для изучения хотя бы этого — математики — есть.

Леонард Эйлер (нем. Leonhard Euler; 4 (15) апреля 1707, Базель, Швейцария — 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург, Российская империя) — швейцарский, немецкий и российский математик, входит в первую пятерку величайших математиков всех времен и народов, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Проявив интерес к математике с детства, он привлек к себе внимание Иоганна Бернулли. Профессор стал лично руководить самостоятельными занятиями юноши и вскоре публично признал, что от проницательности и остроты ума юного Эйлера он ожидает самых больших успехов. Эйлер — автор более чем 800 работ (!) по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. В 1726 году он был приглашён работать в Санкт-Петербург, куда переехал годом позже. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. С 1731 по 1741, а также с 1766 года был академиком Петербургской академии наук. В 26 лет Эйлер был избран российским академиком, но через 8 лет он переехал из Петербурга в Берлин (в 1741—1766 годах работал в Берлине, оставаясь одновременно почётным членом Петербургской Академии). Хорошо знал русский язык и часть своих сочинений (особенно учебники) публиковал на русском. Первые русские академики-математики (С. К. Котельников) и астрономы (С. Я. Румовский) были учениками Эйлера.

Николай Иванович Лобачевский (20 ноября (1 декабря) 1792, Нижний Новгород — 12 (24) февраля 1856, Казань) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии, деятель университетского образования и народного просвещения. Известный английский математик Уильям Клиффорд назвал Лобачевского «Коперником геометрии».

Николай — отцом был чиновник в геодезическом департаменте Иван Максимович Лобачевский (1760—1800). Отец умер в возрасте всего 40 лет, оставив детей и жену Прасковью Александровну в трудном материальном положении. В 1802 году Прасковья Александровна отдала всех троих сыновей в Казанскую гимназию, единственную в те годы во всей восточной части Российской империи, на «казённое разночинское содержание». Николай Лобачевский окончил гимназию в конце 1806 года, показав хорошие знания, особенно по математике и языкам — латинскому, немецкому, французскому. В проявившемся уже тогда его интересе к математике — большая заслуга преподавателя гимназии Г. И. Карташевского.

В 1811 году, окончив университет, Лобачевский получил степень магистра по физике и математике с отличием и был оставлен при университете. С октября того же года Бартельс начал заниматься с Лобачевским изучением классических работ Гаусса и Лапласа. Изучение этих работ стало стимулом для самостоятельных исследований. В конце 1811 года Лобачевский представляет рассуждение «Теория эллиптического движения небесных тел». В 1813 году представлена ещё одна работа — «О разрешении алгебраического уравнения ». 26 марта 1814 года 21-летний Лоба-

чевский по ходатайству Броннера и Бартельса был утверждён адъюнктом чистой математики.

Сохранились студенческие записи лекций Лобачевского (от 1817 года), где им делалась попытка доказать пятый постулат Евклида, но в рукописи учебника «Геометрия» (1823) он уже отказался от этой попытки. В «Обозрениях преподавания чистой математики» за 1822/23 и 1824/25 годы Лобачевский указал на «до сих пор непобедимую» трудность проблемы параллелизма и на необходимость принимать в геометрии в качестве исходных понятия, непосредственно приобретаемые из природы. 7 (19) февраля 1826 года Лобачевский представил для напечатания в «Записках физико-математического отделения» сочинение: «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» (на французском языке). Но издание не осуществилось. Рукопись и отзывы не сохранились, однако само сочинение было включено Лобачевским в его труд «О началах геометрии» (1829—1830), напечатанный в журнале «Казанский вестник». Это сочинение стало первой в мировой литературе серьёзной публикацией по неевклидовой геометрии, или геометрии Лобачевского.

Не найдя понимания на Родине, Лобачевский попытался найти единомышленников за рубежом. В 1837 году статья Лобачевского «Воображаемая геометрия» на французском языке (Geometrie imaginaire) появилась в авторитетном берлинском журнале Крелле, а в 1840 году Лобачевский опубликовал на немецком языке небольшую книгу «Геометрические исследования по теории параллельных», где содержится чёткое и систематическое изложение его основных идей. Два экземпляра получил Карл Фридрих Гаусс, «король математиков» той поры. Ознакомившись с результатами Лобачевского, он восторженно отозвался о них: "Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение."

Гаусс выразил свою симпатию к идеям русского учёного косвенно: он рекомендовал избрать Лобачевского иностранным членом-корреспондентом Гёттингенского королевского научного общества как «одного из превосходнейших математиков русского государства».

Эварист Галуа (фр. Evariste Galois; 25 октября 1811, Бур-ля-Рен, О-де-Сен, Франция — 31 мая 1832, Париж, Франция) — выдающийся французский математик, основатель современной высшей алгебры. За 20 лет жизни Галуа успел сделать открытия, ставящие его на уровень крупнейших математиков XIX века. Решая задачи по теории алгебраических уравнений, он заложил основы современной алгебры, вышел на такие фундаментальные понятия, как группа (Галуа первым использовал этот термин, активно изучая симметрические группы) и поле (конечные поля носят название полей Галуа). Галуа исследовал старую проблему, решение которой с XVI века не давалось лучшим математикам: найти общее решение уравнения произвольной степени, то есть выразить его корни через коэффициенты, используя только арифметические действия и радикалы. Нильс Абель несколькими годами ранее доказал, что для уравнений степени 5 и выше решение «в радикалах» невозможно; однако Галуа продвинулся намного дальше. Он нашёл необходимое и достаточное условие для того, чтобы корни уравнения допускали выражение через радикалы. Но наиболее ценным был даже не этот результат, а те методы, с помощью которых Галуа удалось его получить. Открытия Галуа произвели огромное впечатление и положили начало новому направлению — теории абстрактных алгебраических структур.

Группа Галуа — мощное средство для представления свойств симметрии уравнения. Галуа был застрелен на дуэли в возрасте двадцати лет.

Арифметика достигла настоящей степени совершенства лишь благодаря гениальным трудам корифеев математики последних двух столетий; достаточно упомянуть имена Ньютона, Лейбница, Валлиса, Эйлера и др., чтобы представить себе, сколько трудов было потрачено, пока арифметика достигла той степени изящества и простоты, на которую она возведена в настоящее время.

Небезынтересно будет упомянуть, как постепенно распространялась арифметика в России. Карамзин полагает («История Государства Российского», т. X, с. 259), что первая русская арифметика появилась в исходе XVI ст., под следующим названием: «Книга, рекома по-гречески арифметика, по-немецки алгорисма, а по-русски — цифирная счетная мудрость». Мы тут имеем дело с обрывочными сведениями о 4 первоначальных действиях, трактованных еще по древнему методу греков; при этом мы находим также римские цифры, а не арабские.

С арабскими цифрами арифметика была впервые сочинена и опубликована у нас учителем математики на Сухаревой башне (в Москве) Леонтием Магницким. Благодаря трудам знаменитого Эйлера, бывшего академиком Российской академии наук, и целой плеяды славных его учеников, арифметика вместе с алгеброй получают самостоятельное направление и, независимо от иностранных математиков, движутся быстрыми шагами вперед, дойдя до той формы, которую арифметика сохранила до настоящего времени.

Значение достижений астрономии и математики трудно переоценить. Запуск искусственных спутников Земли (1957 г., СССР), космических станций (1959 г., СССР), первые полеты человека в космос (1961 г., СССР) — эпохальные события для всего человечества. За ними последовали доставка на Землю лунного грунта, посадка спускаемых аппаратов на поверхности Венеры и Марса, посылка автоматических межпланетных станций к более далеким планетам Солнечной системы, желание найти жизнь во Вселенной.

Часть I

Теория множеств

Глава 1

Теория множеств

«Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит.»

Михайло Ломоносов (1711—1765), великий русский ученый

1.1 Общие понятия теории множеств.

Теория множеств — раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств. Теория множеств лежит в основе большинства математических дисциплин; она оказала глубокое влияние на понимание предмета самой математики. В данной главе теория множеств представленна в самом элементарном виде.

Вряд ли можно назвать какую-либо возникшую в XIX веке математическую дисциплину, которая оказала бы большее влияние на последующий прогресс всей математики и, шире, на математическое мышление в целом, чем теория множеств. Первый набросок теории множеств принадлежит Бернарду Больцано («Парадоксы бесконечного», 1850). В этой работе рассматриваются произвольные (числовые) множества, и для их сравнения определено понятие взаимно-однозначного соответствия. К идеям теории множеств в разное время подходили с разных сторон многие ученые, но оформление ее в самостоятельную науку, со своими особыми предметом и методами исследования, осуществил в работах 1872–1897 гг. великий немецкий ученый Георг Кантор. Он разработал свою программу стандартизации математики, в рамках которой любой математический объект должен был оказываться тем или иным «множеством».

Издание на русском языке переводов его статей было сделано впервые в 1932 г. Далее глубокое исследование самых основ теории множеств было проведено средствами математической логики другими учеными, одним из лучших ученых логиков мира можно считать А. Зиновьева, и особенно его фундаментальный труд «Очерки комплексной логики». Александр Александрович Зиновьев (29 октября 1922 года — 10 мая 2006 года) — русский логик, математик, социальный философ, выдающийся социолог; писатель. Членство в академиях: Финской, Итальянской, Баварской, Российской академии социальных наук, Вице-президент Академии российской словесности, Член Международной академии наук Евразии. Почётные звания: Почётный гражданин

города Авиньон (Avignon), Почётный гражданин Костромской области, Почётный гражданин города Равенна (Ravenna), Почётный гражданин города Оранж (Orange), Почётный профессор Университета Сантьяго де Чили, Почётный профессор Московского гуманитарного университета, «Человек года — 2001». Учёные степени и звания: Доктор философских наук (1960 г.), Профессор философского факультета МГУ, Профессор Литературного института им. М. Горького. Тем, кто хочет глубоко изучать логику мы рекомендуем обратиться к работам А. Зиновьева.

Нельзя сказать что построение теории множеств на данный момент завершено полностью, поэтому изыскания здесь продолжаются.

Особенностью аксиоматического подхода является отказ от лежащего в основе программы Кантора представления о действительном существовании множеств в некотором идеальном мире. В рамках аксиоматических теорий множества «существуют» исключительно формальным образом, и их «свойства» могут существенно зависеть от выбора аксиоматики.

В этой главе рассматриваются, основные конструкции и понятия канторовской теории множеств. Первоначальное и ведущее положение в этой теории занимает идея «совокупности», «семейства», «множества». Например, можно говорить о совокупности (группе) людей, присутствующих в данный момент в данной комнате, о совокупности машин, стоящих на площади, и т. п. В каждом из этих случаев можно было бы вместо слова «совокупность» употребить слово «множество» или «группа». В математике постоянно приходится иметь дело с различными множествами: например, со множеством вершин треугольника, множеством делителей числа 12 и т. д. Занимаясь науками и прикладными дисциплинами мы непременно рассуждаем о множествах тех или иных объектов реального мира или мира понятий. Георгу Кантору принадлежит следующее основополагающее высказывание: «*Множество — это соединение в целое определенных различных объектов нашей интуиции или нашего мышления*. Эти объекты называются точками полученного множества».

Обсудим это положение. С рассмотрением множеств связано фундаментальное стремление науки сводить сложное к простому. Например, отрезок, прямую, окружность, эллипс, плоскость, круг при анализе многих их свойств весьма полезно рассматривать как множества элементарных, неделимых далее объектов — точек. У идеи множества есть и принципиально важная созидательная функция, направленная на образование новых множеств из уже имеющихся объектов. С образованием новых множеств связан прежде всего фундаментальный процесс перехода от частного к общему и сопутствующий ему процесс абстрагирования.

Изучение, классификация и сравнение абстрактных объектов: натуральных чисел, функций, геометрических фигур и т. д. — приводит к рассмотрению новых совокупностей: множеств абстрактных объектов. Ярким и ха-

рактерным примером проявления созидательной функции идеи совокупности является построение системы вещественных чисел как бы «из ничего», а точнее, на основе простейшей, пустой, совокупности. Определив ноль как пустое множество, мы затем строим последовательно положительные целые числа, определяя каждое следующее как совокупность всех предыдущих. Объединяя все целые числа вместе, мы совершаем тем самым первый «трансцендентный» акт собирания — получаем первую бесконечную совокупность. На основе последней обычным образом строится система рациональных чисел; привлекая множество всех подмножеств множества рациональных чисел, мы получаем возможность определить класс вещественных чисел.

Множества служат тем основным элементарным материалом, из которого строятся все основные математические объекты. Отсюда вытекает универсальность идеи множества и языка теории множеств для математики. Более того, мощь и универсальность идеи множества, ее ключевая роль в отражении двух важнейших сторон, функций мышления — созидательной и аналитической — столь велика и несомненна, что есть все основания считать идею множества одной из самых основных и самых первоначальных форм мышления.

Важнейшей особенностью почти всех абстрактных множеств, встречающихся в математике, является их бесконечность. Это связано с характерной чертой математики — идеализацией рассматриваемых ситуаций.

Можно без преувеличения сказать, что понятие множества, совокупности, является основной формой, посредством которой мышление моделирует и анализирует идею бесконечного и тесно с ней связанную идею предельного перехода.

В созидательной функции идеи множества отражается еще одна фундаментальная черта мышления — то, что оно представляет собой процесс. И как процесс мышления нельзя представить завершенным, так и идею множества нельзя представить исчерпанной.

Принцип А. Нельзя в рамках не аксиоматического, подхода к понятию множества, совокупности, считать все совокупности заданными одновременно. Интуитивно это положение можно описать следующим образом. В каждый данный «момент времени» вместо фикции — совокупности «всех» (в том числе еще не построенных, не «созданных» и, следовательно, еще не «существующих») совокупностей нам доступна лишь совокупность «всех уже введенных» в сферу мышления совокупностей. Разумеется, рассматривая последнюю как целое, мы образуем новый объект, новую совокупность, но это требует и нового акта мышления.

Представление о постепенном образовании совокупностей в результате мыслительной деятельности приводит нас к следующему положению.

Принцип Б. Никакая совокупность не может быть членом себя самой.

Интуитивно принцип А можно представить как следствие принципа Б. В этой книге мы строим теорию множеств, исходя из интуитивного, канторовского, представления о множестве, т. е. принимая идею совокупности в качестве первоначальной «порождающей» идеи, но руководствуясь при этом принципами А и Б.

Остановимся на исходных принципах, терминологии, обозначениях и конкретных соглашениях, неформально отражающих основные аксиомы теории множеств. Что же такое множество?

Понятия множество, элементы множества — первичные базисные «неопределяемые» понятия, на которых строится теория множеств. *Совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, свойством, составляет понятие множество.*

Термины «множество», «класс», «семейство» и «совокупность» для нас равнозначны. Например, множество книг в школьной библиотеке, множество боксёров в команде, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и т. д. К числу главных исходных понятий теории множеств относится понятие элемента множества. Множества состоят из элементов и определяются своими элементами. Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: $A, B, \ldots, M, K, \ldots$. Если множество A состоит из элементов $a, b, c, \ldots$, это обозначается с помощью фигурных скобок: $A = \{a, b, c, ...\}$. Если a есть элемент множества A, то это записывают следующим образом: $a \in A$, что a является членом, или точкой, множества A. Если же a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$.

Отношение $\in$ называется отношением принадлежности. Разумеется, два множества X и Y совпадают в том и только в том случае, если они состоят из одних и тех же элементов; запись $X = Y$ означает, что множества X и Y совпадают. С точки зрения логики возможно вывести почти всю современную математику из единого источника — теории множеств. «Множество решений уравнения или неравенства», «множество точек на плоскости», «множество целых чисел» и т. д. — привычные словосочетания, не требующие дополнительных рассуждений и определений.

В выражении $K = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x < 3\}$. $x \mid x \in \mathbb{Z}$ означает, что для любого $x \in Z$ выполнимо условие: $x < 3$. Вертикальная черта обозначает «таких, что». И, далее: $x \in K$.

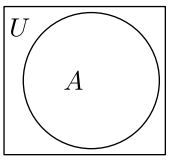
Если множество не содержит элементов, обладающих характеристическим признаком, то оно называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Например, множество целых решений неравенства $2 < a < 3$ является пустым: $K = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ 2 < x < 3\} = \varnothing$.

Всегда ли удается, соблюдая все правила, задать множество? Например, как задать множество всех множеств? Будет ли такое множество содержать

себя как отдельный элемент, ведь по указанному характеристическому свойству оно должно содержать все возможные множества, а значит, и себя? Множества удобно изображать с помощью кругов Эйлера (диаграмм Венна). Элементы множества изображаются точками внутри круга, если они принадлежат множеству, и точками вне круга, если они множеству не принадлежат. Будем также использовать символы $\forall x$ вместо слов «для любых x», «каждый элемент» и $\exists x$ вместо слов «существует x». Значение этих символов и правила их употребления будут подробно разъяснены позже. С помощью теории множеств гораздо удобнее представлять членение объектов и описывать их логические отношения и взаимодействия.

Определение 1. Под *множеством* принято понимать совокупность объектов некоторой природы. Сами объекты называются *элементами множества*.

Однако, как абстрактное математическое понятие «множество» неопределимо. Несмотря на это, определить какое-либо конкретное множество не трудно. Определить любое конкретное множество — значит определить, какие предметы (явления, объекты) принадлежат данному множеству, а какие не принадлежат. Иначе говоря, всякое множество однозначно определяется своими элементами.



Для графического изображения множеств мы определяем сначала пространство U, в которое будет помещено множество. Но в реальной ситуации мы всегда ограничены, например листом бумаги, поэтому в целях упрощения можно пропускать этот пункт. Пусть прямоугольник будет этим пространством. Само множество мы обозначим окружностью. Для того чтобы некоторую совокупность элементов можно было назвать множеством, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

1) Должно существовать правило, позволяющее определить, принадлежит ли указанный элемент данной совокупности.
2) Должно существовать правило, позволяющее отличать элементы друг от друга. (Это, в частности, означает, что множество не может содержать двух одинаковых элементов.)

Существует также специальное, так называемое *пустое множество*, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество является частью любого множества. Например, это может быть множество детей, которые старше своих родителей.

1.1.1 Универсальное множество

Обычно, все множества, с которыми имеют дело в том или ином рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества U. Будем называть такое множество *универсальным множеством*. Лю-

бая геометрическая фигура на плоскости, например, является подмножеством всех точек на плоскости. Например, множество планет Солнечной системы $U = \{$Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун$\}$. Заметим, что понятие универсального множества четко не определено, т. е. некорректно. U можно включить в другое множество W, и оно тоже будет универсальным. Например, долго считалось, что множество действительных чисел R универсально (т. е. описывает всю математику), пока не открыли поле комплексных чисел C и надкомплексные числа и не поняли, что не существует универсального числового множества. Тем не менее там, где область объектов не выходит за рамки некоего множества, иногда бывает удобно оперировать с этим термином.

Пример № 1. Для множества учителей математики в школе можно выбрать универсальным множеством как множество всех учителей данной школы, так и множество всех учителей математики района, так и любое другое в зависимости от рассматриваемой задачи.

Пример № 2. Множество всех материков на планете Земля: Африка, Евразия и т. д.

Пример № 3. Множество всех марок легковых автомобилей, сделанных в России за последние 25 лет: Лада, УАЗ, Запорожец, Москвич.

Пример № 4. Если на столе стоит одна лампа, то универсальное множество ламп на этом столе это одна лампа.

1.1.2 Диаграммы Эйлера—Венна

Операции множеств и связанные с ними соотношения представляются наглядно с помощью диаграмм Эйлера—Венна. На этих диаграммах любые множества изображаются кругами, пересекающими друг друга, исходя из того, что внутренними точками круга изображаются элементы множества. Общей частью двух кругов, пересекающих друг друга, представляются возможные общие элементы двух множеств. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника — это как бы пространство в которое помещено всё. Единичный элемент множества — точкой в круге. Если посмотреть более широко, то множества можно изображать любыми замкнутыми фигами: эллипсами, прямоугольниками, треугольниками и т. д.

1.1.3 Способы задания множеств

Зададим множество A. Графически это будет окружность помещенная в прямоугольник. Но, как мы уже говорили, можем обозначать множество

любой фигурой: прямоугольником, эллипсом или любым замкнутым контуром. Обозначим множество одной из заглавных букв латинского алфавита (но, опять же, можно выбрать и любой другой алфавит или знак) — здесь это буква A. Для того, чтобы задать множество, нужно указать, какие элементы ему принадлежат (или могут принадлежать). Это можно сделать различными способами. Множество считается заданным в следующих случаях.

1) Если перечислены все его элементы, которые записываются в фигурных скобках через запятую: $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ Например, множество учеников в классе определяется списком в классном журнале, множество всех стран на земле — их списком в географическом атласе. Но этот способ применим только для *конечных множеств*, да и то не для всех. Например, хотя множество всех рыб в океане конечно, вряд ли его можно задать списком. Существуют *бесконечные множества*.
2) Множество можно задать характеристическим свойством, т.е указано свойство, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. $M = \{x \mid P(x)\}$. Такая запись читается как: M состоит из тех (всех) и только тех элементов x, которые обладают признаком P.

   Т. е. множество можно задать функционально $A = \{x \mid \exists y\colon f(y) = x\}$. Например, $M = \{n \mid n \in \mathbb{N},\ n < 7\}$ означает: M составляют только те натуральные числа, что меньше семи. Само свойство P будем называть характеристическим. В качестве характеристического свойства может выступать указанная для этого свойства порождающая процедура, которая описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов. Тогда элементами множества считаются все объекты, которые могут быть получены с помощью этой процедуры, Итак, запись $M = \{x \mid P(x)\}$ означает: множество M состоит из всех элементов x, обладающих признаком P. Например, запись $M = \{x \mid 5x - 5 = 0\}$ означает, что множество M содержит только корни данного уравнения, т. е. только число 1. Отметим, что в записи $M = \{x \mid P(x)\}$ переменная x является «немой», т. е. несущественной: от нее ничего не зависит. Можно было бы употребить любую другую букву, например y, и все равно это было бы «множество всех элементов, обладающих признаком P», а как называть элементы — несущественно: главное, чтобы они обладали неким признаком. Этот способ позволяет определить принадлежность элемента x множеству M и, поэтому, пригоден для описания не только конечных, но и бесконечных множеств. Характеристическое условие обычно задается в форме логического утверждения, которое может выражаться словами, математическими уравнениями, неравенствами или иным формализованным видом. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае — не принадлежит. Но

при таком способе могут возникнуть проблемы, например, связанные с недостатками языка. Рассмотрим множество всех деревьев на земле. Тогда нужно определить, идет ли речь о деревьях которые существовали и будут существовать на земле или о деревьях в конкретный момент времени. Могут возникнуть и проблемы поглубже. Рассмотрим, например, парадокс брадобрея. Брадобрей должен брить тех людей, которые не бреются сами. Но тогда брить ли ему себя? Любые противоречащие друг другу условия задают пустое множество.

Задача № 1. Если множество A состоит из элементов f, g, h, как это обозначается?

Задача № 2. Если $A = \{a, b, c, d\}$. Как записать, что a и d есть элементы множества A, а j не является элементом множества A?

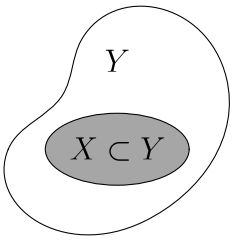
Задача № 3. На столе лежат 3 зеленых шара, 4 красных, и 5 — синих шаров. Опишите множество не красных шаров.

Задача № 4. Задайте пустое множество тремя разными способами.

Задача № 5. Задайте множество чисел $\{1, 2, 5\}$ в форме записи «$A = \{x \mid$ такие что $\ldots\}$» двумя разными способами

Задача № 6. Есть числа от 1 до 10, задайте множество чисел, не делящихся нацело на 3.

1.1.4 Подмножества



Понятие подмножества возникает всякий раз, когда появляется необходимость рассматривать некоторое множество не самостоятельно, а как часть другого, более широкого множества.

Определение 2. Множество X является *подмножеством* множества Y, если любой элемент, принадлежащий множеству X, принадлежит множеству Y. Обозначается: $X \subseteq Y$.

Например, если взять какую-то среднюю школу, то множество учеников 9 класса этой школы является подмножеством всех учеников этой школы. $X \subseteq Y$ обозначает, что множество X содержится в Y, причем X может быть равным множеству Y. Строгое включение $X \subset Y$ исключает такое равенство. Если $X \subset Y$, $X \neq \oslash$, то X — собственное подмножество множества Y. Y и $\oslash$ называются несобственными подмножествами Y. Например, множество

машин является несобственным подмножеством самого себя. А множество мотоциклов — собственное подмножество транспортных средств.

Запишем понятие подмножества еще раз с помощью других обозначений. Это необходимо, чтобы вы не привязывались к определенным буквам или именам. Из множества M можно выделить его часть (также выделением нового характеристического свойства или перечислением элементов) — множество K, все элементы которого обладают таким же признаком, как и элементы множества M.

Множество K называют подмножеством множества M и обозначают $K \subset M$. Более строго: множество K называется подмножеством множества M $(K \subset M)$, если для любого $x \in K$ выполняется $x \in M$ (т. е. $\forall x \in K$ выполняется $x \in M$). Например, добавляя к множеству однозначных целых чисел $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ признак «число делится на 2», получаем множество $B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \subset A$. Так, множество целых чисел Z является подмножеством множества рациональных чисел Q. Для числовых множеств справедливо соотношение: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — целых, $\mathbb{Q}$ — рациональных, $\mathbb{R}$ — действительных, $\mathbb{C}$ — комплексных чисел. Для любого непустого множества M можно сразу указать два его подмножества независимо от состава и структуры M: это оно само и пустое подмножество. Очевидно, пустое множество содержится (является подмножеством) в любом множестве. Также необходимо учитывать различие в употреблении знаков включения ($\subset$) и принадлежности ($\in$) для множества множеств.

Задача № 7. На столе лежат 3 зеленых шара, 4 красных шара. Опишите подмножество не красных шаров.

Задача № 8. На столе лежат 3 зеленых шара, 4 красных шара. Опишите подмножество не синих шаров.

Задача № 9. Опишите подмножество летающих крокодилов множества крокодилов.

Задача № 10. Есть множество чисел от 1 до 3. Опишите подмножество четных чисел.

Задача № 11. Дано множество чисел $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Опишите подмножество четных чисел. $B \subseteq A$, $B = \{?\}$.

Задача № 12. Дано множество чисел $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Опишите подмножество нечетных чисел. $B \subseteq A$, $B = \{?\}$.

Задача № 13. Дано множество $A = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$. Опишите подмножество чисел, делящихся на 10. $B \subseteq A$, $B = \{?\}$.

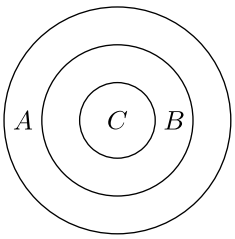
Задача № 14. Дано множество $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$. Опишите подмножество, делящихся нацело на $\frac{1}{2}$. $B \subseteq A$, $B = \{?\}$.

Задача № 15. Дано множество A = {Маша, Мурзик, Оля, Юра, Сеня, Жучка, Пушок}; Опишите подмножество имен людей B и подмножество имен животных C. Также выделите подмножество мужских имен D и женских F. $B \subseteq A$; $C \subseteq A$; $D \subseteq A$; $F \subseteq A$?

Задача № 16. Дано множество A = {медведь, крокодил, дельфин, кенгуру, корова, кролик, курица}; Опишите подмножество хищников B и подмножество млекопитающих C. Также выделите подмножество животных, умеющих плавать D, одомашненных животных F.

Задача № 17. Дано множество A = {компьютер, телевизор, ДВД-проигрыватель, костяные счёты, кухонный комбайн, мясорубка, автомобиль}. Опишите подмножество кухонных бытовых приборов и подмножество устройств для вычислений. Также выделите подмножество электрических приборов и механических устройств, а может и то, что никуда не подходит. Сами введите обозначения и опишите взаимодействия между множествами.

1.1.5 Свойство транзитивности для подмножеств



Если $C \subset B$ и одновременно $B \subset A$, то $C \subset A$, т. е. если C подмножество множества B и B подмножество множества A, то отсюда следует, что C подмножество множества A.

Пример № 5. Есть числа от 0 до 100, которые входят в множество чисел от 0 до 1000. Есть числа от 0 до 1000, которые входят в множество чисел от 0 до 10000. Следовательно, числа от 0 до 100 входят в множество чисел от 0 до 10000.

Задача № 18. Если A — люди, B — военные, C — офицеры, докажите, что офицеры тоже и люди и военные.

Задача № 19. Если A — военные, B — офицеры, C — майоры, докажите, что майоры и офицеры и военные.

Задача № 20. В одном классе все ученики играют в волейбол, причем, всего 27 учеников. И все волейболисты делают утреннюю зарядку. Верно ли, что найдется в этом классе ученик, который не делает зарядку?

Задача № 21. Пусть A — люди, B — несовершеннолетние, C — мальчики, D — девочки. Нарисуйте в виде кругов Эйлера и напишите в символическом виде и в виде обозначений букв и символов отношения между множествами.

Задача № 22. Пусть $A = \{1, 2, \ldots 9\}$, $B = \{2, 3, 4, \ldots 8\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Нарисуйте в виде кругов Эйлера и напишите в символическом виде и в виде обозначений букв и символов отношения между множествами.

Задача № 23. Пусть $A = \{-2, -1, 0, +1, +2 \ldots 5\}$, $B = \{0, 1, 2, \ldots 5\}$, $C = \{1, 2, 3, \ldots 5\}$, $D = \{1, 3, 5\}$. Введите обозначения. Нарисуйте в виде кругов Эйлера и напишите в символическом виде и в виде обозначений букв и символов, отношения между множествами.

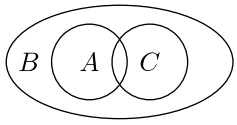
1.1.6 Свойство рефлексивности для подмножеств

Определение 3. Любое множество является своим подмножеством $A \subset A$.

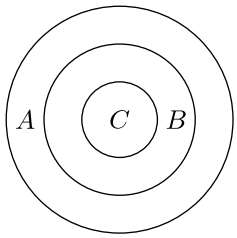
Если дано множество чисел $A = \{1, 2, 3\}$, то одним из его подмножеств будет $A = \{1, 2, 3\}$. Визуально это соответствует наложению множества $A \subset A$ на самого себя, т. е. на $A \subset A$ и если это сделать, то получим тоже самое.

Задача № 24. Все ученики класса учат английский язык. Английский учат только ученики этого класса. Каждый человек является элементом какого-то множества. Верно ли, что множество тех, кто учит английский язык совпадает с множеством учеников этого класса?

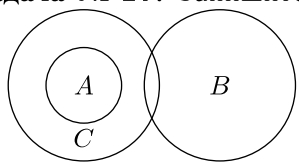
Задача № 25. Запишите в символическом виде:



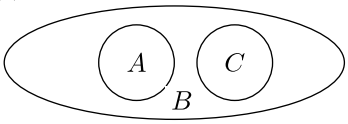
Задача № 26. Запишите в символическом виде:



Задача № 27. Запишите в символическом виде:



Задача № 28. Запишите в символическом виде:



Задача № 29. Привести примеры подмножеств в множестве учителей данной школы.

Задача № 30. Приведите несколько примеров подмножеств в множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Задача № 31. Приведите несколько примеров подмножеств в множестве $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

1.2 Операции над множествами

1.2.1 Мощность множеств

Определение 4. Число элементов конечного множества A называется *мощностью* множества и обозначается $|A|$ или $n(A)$.

Так, мощность пустого множества равна $0 : n(\varnothing) = 0$, а мощность множества планет Солнечной системы $n(U) = 8$ или $|U| = 8$.

Задача № 32. Найдите мощность множества букв в латинском алфавите.

Задача № 33. Найдите мощность множества азбуки Морзе.

Задача № 34. Найдите мощность множества $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{9}{11}\}$.

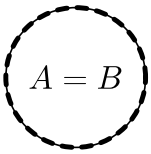
Задача № 35. Найдите мощность множества $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}$ и $x = \frac{n}{12},\ n \in \mathbb{N}$ — правильная несократимая дробь$\}$.

Задача № 36. Найдите мощность множества A всех детей группы, если это 3 девочки и 2 мальчика.

Задача № 37. Найдите число, которое является суммой мощностей множеств A — это животные в зоомагазине, если это 2 попугая, 3 черепашки, 1 котёнок, 8 хомячков, 5 свинок, 4 змеи и 10 рыбок, 4 лягушки. D — это насекомые в коллекции в музее: 3 ночные бабочки, 8 мотыльков, 2 стрекозы, 8 кузнечиков, 3 муравья.

1.2.2 Равенство множеств

Определение 5. Множества A и B *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть, если из $x \in A$ *следует* $x \in B$ и обратно, из $x \in B$ *следует* $x \in A$.



Знак следует обозначается так: $\Rightarrow$. Равенство множеств A и B записывают в виде $A = B$. Например, множество четных натуральных чисел, меньших 10, и множество $\{6, 2, 8, 4\}$ равны.

Равны множества букв, из которых составлены слова «гора» и «рога». Равны множество корней уравнения $3x = 1$ и множество $M = \{-\frac{1}{3}\}$.

Равенство двух множеств A и B означает также, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. И наоборот, выполнение свойств $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ означает выполнение равенства $A = B$. Эти утверждения равносильны.

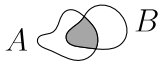
Задача № 38. Равны ли множества A и B, если A это 4 девочки, а B — 4 мальчика?

Задача № 39. Равны ли множества A и B, если A это 3 девочки, а B — 4 девочки?

Задача № 40. Равны ли множества A и B, если $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{9}{11}\}$. $B = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{3}{11}\}$?

1.2.3 Операции над множествами

Пересечение

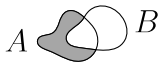


Обозначается «$\cap$».
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Объединение

Обозначается «$\cup$».
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Разность



Обозначается «$\setminus$».
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Симметрическая разность

Обозначается «Δ».
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Рассмотрим эти операции подробно.

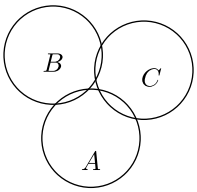
1.2.4 Пересечение множеств

Определение 6. *Пересечением* любого конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно. $A \cap B = \{x \mid x \in \in A \wedge x \in B\}$.

Название «пересечение» происходит от того, что при пересечении множеств точек двух геометрических фигур получают множество точек пересечения этих фигур в самом обычном смысле этого слова.

Пример № 6. Например, пусть в 9 «А» классе учатся школьники $A = \{$Иванов, Петров, Сидоров, Васильев$\}$. А в секцию по боксу в этой школе ходят школьники $B = \{$Андреев, Александров, Петров, Козлов, Иванов$\}$. Тогда множество учеников 9 «А» класса, занимающихся боксом равно $\{$Петров, Иванов$\}$, т. е. пересечение этих множеств.

Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.



На следующем рисунке пересекаются 3 пары множеств, и это можно записать так: $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

Задача № 41. Найдите пересечение множеств простых делителей чисел 12 и 6. Чему равно произведение элементов этого множества?

Задача № 42. Найдите пересечение множеств простых делителей чисел 30 и 70. Чему равно произведение элементов этого множества?

Задача № 43. $A = \{1, 4, 7, 11\}$; $B = \{10, 4, 5, 1\}$. Найдите пересечение $A \cap B$.

Задача № 44. $A = \{f, o, x\}$; $B = \{c, a, t\}$. Найдите $A \cap B$.

Задача № 45. $A = \{b, o, x\}$; $B = \{b, e, a, r\}$. Найдите $A \cap B$.

Задача № 46. $A = \{10, 14, 17, 110\}$; $B = \{110, 4, 50, 17\}$. Найдите $A \cap B$.

Задача № 47. Пусть в 7 «Б» классе учатся школьники $A = \{$Иванов, Комов, Дуров, Ёлкин$\}$. А в секцию по футболу в этой школе ходят школьники $B = \{$Андреев, Комов, Петров, Ёлкин$\}$. Найдите множество учеников 7 «Б» класса, занимающихся футболом, т. е. пересечение множеств учеников и футболистов.

Задача № 48. $A = \{h, o, u, s, e\}$; $B = \{h, o, r, s, e\}$. Найдите $A \cap B$.

Задача № 49. Дано множество $A = \{$медведь, крокодил, дельфин, кенгуру, корова, кролик, курица$\}$. Опишите тех зверей, которые и хищники, и умеют хорошо плавать — F. B — тех, кто млекопитающие и имеют мех. C — тех, кто может поймать рыб в реке.

Задача № 50. Дано A = {компьютер, наушники для музыки, телевизор, ДВД-проигрыватель, костяные счёты, кухонный комбайн, мясорубка, автомобиль, разделочный нож, наушники от холода меховые}. Опишите предметы, находящиеся всегда на кухне. Предметы, которые могут быть на кухне. Устройства, которые трудно сделать самим дома, если вы не специалист в электронике, но умеете работать с металлами и деревом. Сами введите обозначения и опишите взаимодействия между множествами.

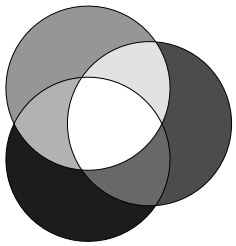
Пересечение трех множеств

Пример № 7. Пусть в 8 «А» классе учатся школьники A = {Иванов, Петров, Сидоров, Васильев}. А в секцию по боксу в этой школе ходят школьники B = {Андреев, Александров, Петров, Козлов, Иванов}. А в секцию по шахматам в этой школе ходят школьники B = {Иванов, Сидоров}. Тогда множество учеников 8 «А» класса, занимающихся боксом и шахматами равно {Иванов}, т. е. это пересечение этих 3-х множеств.

Задача № 51. Пусть имеются чашки, которые оцениваются по размеру, цвету и цене. Некоторые зеленые чашки — большие. Некоторые большие чашки — дорогие. Некоторые дорогие чашки — зеленые. Можно ли утверждать, что найдется зеленая, большая и дорогая чашка из представленных?

Задача № 52. Пусть в 10 «А» классе учатся школьники Персикова, Иванов, Петров, Сидоров, Васильев. В секцию рисования в этой школе ходят школьники B = {Андреев, Александров, Петров, Козлов, Иванов, Персикова}. В секцию по шахматам в этой школе ходят школьники C = {Иванов, Сидоров, Персикова}. А в авиамодельный кружок ходят D = {Иванов, Сидоров}. Найдите: а) всех, кто ходит во все секции; б) всех, кто ходит в секцию рисования и в авиамодельный кружок; в) всех, кто ходит в секцию по шахматам и в авиамодельный кружок; г) всех, кто ходит в секцию по шахматам или в авиамодельный кружок; д) всех, кто не ходит ни в одну секцию.

Задача № 53. На рисунке ниже нарисовано пересечение трех множеств. Запишите с помощью знаков теории множеств все цвета и их парные комбинации на рисунке.

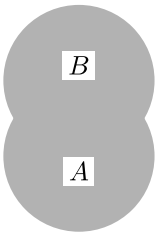


1.2.5 Объединение множеств

Определение 7. *Суммой*, или *объединением* произвольного конечного или бесконечного множества множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, *которые принадлежат хотя бы одному из множеств* A, B. Обозначается $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Пример № 8. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пример № 9. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Следует иметь ввиду, что некоторые элементы могут входить не в одно, а в несколько слагаемых множеств. В этом случае в сумму они входят все равно только 1 раз.

Пример № 10. Пусть первое множество — множество букв слова МАТЕМАТИКА — {М,А,Т,Е,И,К}, а второе — множество букв слова КАРТОФЕЛЬ — {К,А,Р,Т,О,Ф,Е,Л,Ь}. Тогда суммой этих множеств будет множество

{М,А,Т,Е,И,К,Р,О,Ф,Л,Ь}.

Задача № 54. Найдите объединение множеств простых делителей чисел 30 и 70. Чему равно произведение элементов этого множества?

Задача № 55. Найдите объединение множеств $A = \{11, 33, 55\}$, $B = \{22, 55, 33, 11\}$. Чему равно произведение элементов этого множества?

Задача № 56. $A = \{\text{К}, \text{О}, \text{Р}, \text{А}\}$, $B = \{\text{К}, \text{О}, \text{Р}, \text{А}, \text{Б}, \text{Л}, \text{Ь}\}$. $A \cup B = ?$.

Задача № 57. $A = \{1, 3, 4, 7\}$, $B = \{9, 0, 2, 5\}$. $A \cup B = ?$

Задача № 58. $A = \{1, 8, 6, 3, 4, 7, 5\}$, $B = \{8, 1, 9, 0, 2, 5, 3\}$. $A \cup B = ?$

Задача № 59. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. $A \cup B \cup C = ?$

Задача № 60. На соревнования по настольным играм приехали люди: 4 тренера (все 4 — женщины), один фотограф (женщина). Остальные спортсмены: 46 шахматиста (3 женщины), 34 шашиста (12 женщины), 12 игроков в го (3 женщины), остальные спортсмены — это игроки в крестики-нолики. Всего приехало 110 человек. Из них 8 судей (4 женщины) и один директор (женщина).

Найдите, сколько всего человек в каждой группе (и спортсменов, и персонала)? Сколько всего разных групп? Сколько надо комнат для женщин, если в комнате живут по 5 женщин? Сколько надо комнат для мужчин, если в комнате живут по 6 мужчин? Сколько надо комнат для персонала, если

в комнате живут по 4 человека? Сколько всего надо всех комнат? Какой вместимости должен бы зал собрания только для спортсменов? и зал для собрания персонала?

Введите собственные обозначения, напишите отношения между группами. Изобразите отношения между группами в виде кругов Эйлера.

Задача № 61. На соревнования по лыжам и сноуборду в Сочи приехали: 8 тренеров (из них 1 женщина), 5 массажистов (из них 2 женщины), 4 врача (все женщины), 5 охранников (мужчин), один фотограф (мужчина). Остальные спортсмены: 23 горнолыжника (13 женщин), 12 сноубордистов (8 женщин), и прыгуны с трамплина (5 женщин). Приехало несколько репортеров из них мужчин, в 2 раза больше чем охранников. Всего приехало 87 человек. Из них 5 менеджеров (1 женщина) и один директор (не женщина).

Найдите, сколько всего надо комнат для женщин, если в комнате живут по 2 женщины? Сколько надо комнат для мужчин, если в комнате живут по 4 мужчины? Сколько всего надо всех комнат? Какой вместимости должен бы зал собрания только для спортсменов? зал для собрания персонала?

Введите собственные обозначения, напишите отношения между группами, изобразите их в виде кругов Эйлера.

(Одна спортсменка сказала, что и без теории множеств любую задачку решит легко. Как вы думаете, можно ли решить эту задачу легко и быстро без теории множеств и без знания математики?)

1.2.6 Разбиение множеств

Определение 8. Если множество является суммой своих подмножеств, никакие два из которых не имеют общих элементов, то в этом случае говорят, что множество A *разбито* на непересекающиеся подмножества B и C. $A = B \sqcup C$

Как было сказано, слагаемые суммы могут иметь общие элементы, но часто бывает, что множество является суммой своих подмножеств, никакие два из которых не имеют общих элементов. Например, множество букв {К,А,Р,Т,О,Ф,Е,Л,Ь} можно разбить на сумму непересекающихся подмножеств {К,Р,Т,Ф,Л}⊔{А,О,Е}⊔{Ь}.

Задача № 62. Пусть $A = \{$Маша, Нюра, Света, Дима, Сергей, Толя$\}$; $B = \{$мальчики$\}$, $C = \{$девочки$\}$, $A = B \sqcup C$. Найдите B и C.

Задача № 63. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B = \{$четные числа$\}$, $C = \{$нечетные числа$\}$, $A = B \sqcup C$. Найдите B и C.

Задача № 64. На соревнования по водным видам спорта приехали люди: 3 тренера (из них 1 женщина), 2 массажиста (из них 1 женщина), 3 врача

(2 женщины). Остальные спортсмены: 12 пловцов (5 женщин), 14 ныряльщиков с ластами (2 женщины) и прыгуны с трамплина (из них 3 женщины). Всего приехало 42 человека. Из них 2 менеджеров (1 женщина) и директор (мужчина).

Найдите, сколько всего надо комнат для женщин или девушек, если в комнате живут по 3 женщины? Сколько надо комнат для мужчин, если в комнате живут по 3 мужчины? Сколько надо комнат для персонала, если в комнате живут по 2 человека? Сколько всего надо всех комнат? Какой вместимости должен бы зал собрания только для спортсменов? зал для собрания персонала? Какова вместимость обоих залов? Сколько всего человек в каждой группе и на каждом виде соревнований? Сколько всего разных групп?

Введите обозначения, напишите отношения между группами, изобразите их в виде кругов Эйлера.

Задача № 65. На соревнования по лыжам и сноуборду в Южноуральск приехали люди: 5 тренеров (из них 2 женщины), 4 массажистов (из них 3 женщины), 5 врачей (2 мужчин), 8 охранников (мужчин), 2 фотографа обоих полов. Остальные спортсмены: 34 горнолыжника (18 женщин), 23 сноубордиста (12 женщин), остальные спортсмены — это прыгуны с трамплина (из них 5 женщин). Приехало несколько репортеров мужчин, их в 3 раза больше чем охранников. Всего приехало 128 человека. Из них 7 менеджеров (2 женщины) и один директор (женщина).

Найдите, сколько надо комнат для женщин или девушек, если в комнате живут по 3 женщины. Сколько всего надо комнат для мужчин, если в комнате живут по 5 мужчин? Сколько надо комнат для персонала, если в комнате живут по 2 человека? Сколько всего надо всех комнат? Какой вместимости должен бы зал собрания только для спортсменов? зал для собрания персонала? Какова вместимость обоих залов? Какие множества представляют из себя не пересекающиеся множества?

1.2.7 Разность множеств

Определение 9. *Разностью* между множеством A и множеством B называется множество всех элементов из A, не являющихся элементами множества B. Т. е. те и только те элементы, которые не принадлежат множеству B.

Обратим внимание, что для разности двух множеств не выполняется переместительный закон: $A \backslash B \neq B \backslash A$. Это становится очевидным, если одно множество пустое (например, A), а другое — непустое.

Пример № 11. $A = \{1, 3, 5, 18\}$, $B = \{1, 3, 7, 9\}$. $A \setminus B = \{5, 18\}$.

Пример № 12. В нашем примере про школьников разностью множеств A и B будет множество {Сидоров, Васильев}. Это множество учеников 9 «А», не

занимающихся боксом. При этом совсем необязательно, чтобы множество B было частью A. В этом случае вычитание сводится к удалению из A общей части A и B:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

В случае, когда B является подмножеством A, то $A \setminus B$ называется *дополнением* к множеству B в A и обозначается B_A, дополнение до универсального множества обозначается $\overline{A}$.

Пример № 13. Пусть A — множество транспортных средств {Волга, Москвич, Форд, Ява, Судзуки}, B — множество иномарок {Форд, Мерседес, Судзуки, Ява, Тойота}. Тогда разность A и B будет множество {Волга, Москвич}.

Задача № 66. Пусть A = {Маша, Нюра, Света, Дима, Сергей, Толя}; B = {мальчики} $C = A \setminus B$. Найдите C.

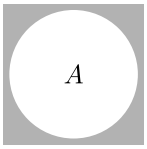
Задача № 67. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B = \{5, 7, 8, 10, 12\}$; $C = A \setminus B$. Найдите C.

Задача № 68. $A = \{11, 22, 31, 45, 55, 68, 73, 86, 90\}$; $B = \{55, 73, 85, 100, 31\}$; $C = A \setminus B$. Найдите C.

Задача № 69. На стройплощадку прислали материалы: A: цемент 7 тонн, кирпич 100000 шт., шифер 400 м. кв., бревна березы 40 шт., бревна сосны 34 шт. Но здесь уже было B: цемент 7 тонн и бревна сосны 34 шт. Найдите разность множеств A и B.

Задача № 70. Найдите разность между множествами $A = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$ и $B = \{1, 3, 7, 9, 0\}$.

1.2.8 Абсолютное дополнение



Вспомним, что универсальное множество мы обозначали буквой U.

Определение 10. Абсолютным дополнением множества A до множества U называется множество, содержащее все элементы множества U, которые не принадлежат множеству A: $\overline{A} = U \setminus A$ (т. е. дополняют его до универсального множества U). $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A$.

Задача № 71. $A = \{a, f, r, t, y, u, o, j\}$; U = {буквы английского алфавита}. Найдите $\overline{A}$.

Задача № 72. A = {все четные числа}; U = {все натуральные числа}. Найдите $\overline{A}$.

Задача № 73. $A = \{$все женщины$\}$; $U = \{$ все люди$\}$. Найдите $\overline{A}$.

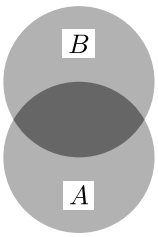
Задача № 74. $A = \varnothing$,

$$U = \{x = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N},\ p, q < 5,\ x \text{ — правильная несократимая}\}.$$

Найдите $\overline{A}$.

1.2.9 Симметрическая разность множеств

Определение 11. Симметрической разностью множеств A и B называется множество всех элементов из A, не являющихся элементами множества B в объединении с множеством всех элементов из B, не являющихся элементами множества A: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



На рисунке симметрическая разность это зона светло-серого цвета.

Заметим, что симметрическую разность можно записать и в следующем виде:

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Пример № 14. $A = \{1, 3, 5, 18\}$, $B = \{1, 3, 7, 12\}$. $A \Delta B = \{5, 7, 12, 18\}$.

Задача № 75. $A = \{$Маша, Нюра, Света, Дима, Сергей, Толя$\}$; $B = \{$Дима, Сергей, Андрей, Светоний$\}$, $C = A \Delta B$. Найдите C.

Задача № 76. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B = \{5, 7, 8, 10, 12\}$; $C = A \Delta B$. Найдите C.

Задача № 77. $A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$; $B = \{1, 7, 9, 10, 12\}$; $C = A \Delta B$. Найдите C.

Задача № 78. $A = \{$шляпа, котелок, цилиндр, кепка$\}$; $B = \{$цилиндр, конус, призма, куб$\}$; $C = A \Delta B$. Найдите C. (Элементы этих множеств — слова русского языка, а не категории разных объектов.)

Задача № 79. $A = \{a, f, r, t, y, u, I, o, j\}$; $B = \{t, y, u, z, x, c\}$; $C = A \Delta B$. Найдите C.

Задача № 80. $A = \{A, f, r, i, c, a\}$; $B = \{E, u, r, o, p, e\}$; $C = A \Delta B$. Найдите C.

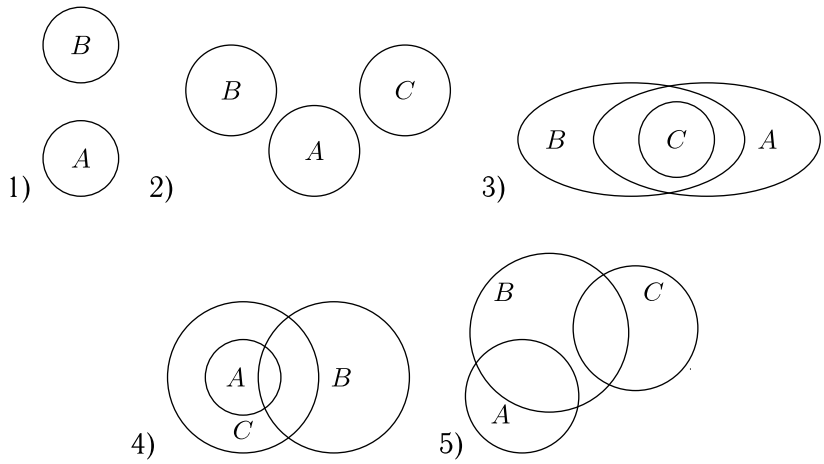
Задача № 81. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 12\}$, $B = \{1, 3, 7, 12, 15\}$. $A \Delta B =?$.

Задача № 82. $A = \{$офицеры, солдаты, матросы, генералы, повара, водители$\}$; $B = \{$водители, генералы, повара, следователи$\}$; $C = A \Delta B$. Найдите C.

Задача № 83. $A = \{r, e, s, i, d, e, n, t\}$; $B = \{P, r, e, s, i, d, e, n, t\}$; $C = A \Delta B$. Найдите C.

Задача № 84. $A = \{g, o, b, l, i, n\}$; $B = \{P, r, e, s, i, d, e, n, t\}$; $C = A \Delta B$. Найдите C.

Задача № 85. Опишите всеми способами взаимоотношения объектов на рисунках.



1.2.10 Приоритеты операций

Под приоритетом операции понимается порядок ее выполнения. Первой выполняется та операция, приоритет которой выше. Приоритет операции пересечения множеств выше приоритета операции объединения. Приоритет операции пересечения множеств выше приоритета операции вычитания. Объединение и вычитание множеств считают равноправными операциями.

Пример № 15. В выражении $C \cup A \cap B$ надо сначала выполнить пересечение $(A \cap B)$, а затем полученное множество объединить с множеством C.

1.3 Экзамен по теме «Множества»

«Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой.»

Карл Маркс

Задача № 86. Если $A = \{a, b, c, d\}$. Как записать, что a и c есть элементы множества A, а h не является элементом множества A?

Задача № 87. Есть числа от 10 до 31, задайте множество чисел, делящихся нацело на 3.

Задача № 88. Дано множество $A = \{50, 51, 52, \ldots, 67\}$; Опишите подмножество $B \subseteq A$ чисел, делящихся на 4.

Задача № 89. Дано множество $A =$ {программист, директор, бухгалтер, сторож, телохранитель, водитель, офицер, пенсионер, пионер, член партии}; Опишите подмножества, на которые можно разбить всех этих людей.

Задача № 90. Пусть $A = \{1, 2, \ldots 9\}$, $B = \{2, 3, 4, \ldots 8\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Нарисуйте в виде кругов Эйлера и напишите в символическом виде и в виде обозначений букв и символов отношения между множествами.

Задача № 91. Пусть $A = \{-2, -1, 0, +1, +2 \ldots 5\}$, $B = \{0, 1, 2, \ldots 5\}$, $C = \{1, 2, 3, \ldots 5\}$, $D = \{1, 3, 5\}$. Нарисуйте в виде кругов Эйлера и напишите в символическом виде и в виде обозначений букв и символов отношения между множествами.

Задача № 92. На соревнования по настольным играм приехали люди: 4 тренера (из них 4 женщины), один фотограф (женщина). Остальные спортсмены: 46 шахматистов (из них 3 женщины), 34 мастера по шашкам (из них 12 женщины), 13 игроков в го (из них 3 женщины) и мужчины игроки в крестики-нолики. Всего приехало 120 человека. Ещё из приехавших 8 судей (из них 4 женщины) и один директор (женщина). Найдите:

1) Сколько всего человек в каждой группе и спортсменов и персонала?
2) Сколько всего разных групп?
3) Сколько надо комнат для женщин (или девушек), если в комнате живут по 5 лиц женского пола (спортсмены и персонал без разницы)?
4) Сколько надо комнат для мужчин, если в комнате живут по 6 мужчин?
5) Какой вместимости должен бы зал собрания только для спортсменов мужского пола?
6) А зал для собрания персонала?

Введите обозначения, напишите отношения между группами и изобразите их в виде кругов Эйлера.

Задача № 93. На соревнования по водным видам спорта в Индию приехали люди: 3 тренера (из них 1 женщина), 2 массажиста (из них 1 женщина), 3 врача (из них 2 женщины). Остальные спортсмены: 12 пловцов (из них 5 женщин), 14 ныряльщиков с ластами (из них 2 женщины) и прыгуны с трамплина (из них 5 женщин). Ещё приехало 2 менеджера (из них 1 женщина) и директор (мужчина). Всего приехало 42 человека. Найдите:

1) Сколько надо комнат для женщин, если в комнате живут по 3 женщины.
2) Сколько надо комнат для мужчин, если в комнате живут по 3 мужчины.
3) Сколько всего надо всех видов комнат.
4) Какой вместимости должен бы зал собрания только для спортсменов?
5) И зал для собрания персонала?
6) Какова вместимость обоих залов?
7) Сколько всего человек в каждой группе и на каждом виде соревнований?
8) Сколько всего разных групп вы уже насчитали?

Введите обозначения, напишите отношения между группами, нарисуйте их в виде кругов Эйлера.

Задача № 94. На соревнования по лыжам и сноуборду в Южноуральск приехали люди: 5 тренеров (из них 2 женщины), 4 массажиста (из них 3 женщины), 5 врачей (3 женщины, остальные мужчины), 8 охранников (мужчин), 2 фотографа (мужчина и женщина). Остальные спортсмены: 34 горнолыжника (из них 18 женщин), 23 сноубордиста (из них 12 женщин) и прыгуны с трамплина (из них 5 женщин). Приехало несколько репортеров мужчин. Приехало 7 менеджеров (из них 2 женщины) и один директор (женщина). Всего приехало 105 человек. Найдите:

1) Сколько надо комнат для женщин или девушек, если в комнате живут по 3 женщины (девушки)?
2) Сколько надо комнат для мужчин, если в комнате живут по 5 мужчин?
3) Сколько всего надо всех комнат?
4) Какой вместимости должен бы зал собрания только для спортсменов женского пола?
5) А зал для собрания персонала?
6) Какова вместимость обоих залов?
7) Сколько всего человек в каждой группе?
8) Сколько всего разных групп?
9) Какие множества представляют из себя не пересекающиеся множества, приведите пример 4 таких пересекающихся множеств?
10) Разбейте спортсменов на сумму 4 непересекающихся подмножеств из перечисленных в задаче.

Введите обозначения, напишите отношения между группами, нарисуйте их в виде кругов Эйлера. (Как вы думаете, можно ли решить именно эту задачу без знания теории множеств?)

Задача № 95. На стройплощадку прислали материалы: A: цемент 7 тонн, кирпич 100 000 шт., шифер 400 м. кв., бревна березы 40 шт., бревна сосны 34 шт. Но здесь уже был B: цемент 7 тонн и бревна сосны 34 шт. Найдите разность C множеств A и B.

Задача № 96. * На соревнования по лыжам и сноуборду в Сочи приехали люди: 8 тренеров (из них 1 женщина), 5 массажистов (из них 2 женщины), 4 врача (все женщины), 5 охранников (мужчин), один фотограф (мужчина). Остальные спортсмены: 23 горнолыжника (из них 13 женщин), 12 сноубордистов (из них 8 женщин) и прыгуны с трамплина (из них 5 женщин, остальные мужчины). Приехало несколько репортеров мужчин, их в 2 раза больше чем охранников. Всего приехало 87 человек. Из них 5 менеджеров (из них 1 женщина) и один директор (не женщина). Найдите:

1) Сколько надо комнат для женщин, если в комнате живут по 2 женщины.
2) Сколько надо комнат для мужчин, если в комнате живут по 4 мужчины.
3) Сколько всего надо всех комнат.
4) Какой вместимости должен бы зал собрания только для спортсменов?
5) А зал для собрания персонала?
6) Сколько дней будут проходить именно соревнования, если для заезда по лыжам и прыжков с трамплина на 10 человек спортсменов нужен день, а для сноубордистов в один день соревнования катаются только 6 человек?
7) Сколько дней будут проходить все мероприятие, если 1 день это открытие без заездов, а последний день — заключительные награждения без заездов? В эти дни их не кормят.
8) Сколько килограмм продуктов надо завести для всех в ресторан на весь период соревнований, если мужчина спортсмен съедает в день по 4 кг, мужчина не спортсмен 2 кг, женщина спортсмен съедает в день 2,6 кг, женщина не спортсмен 2,1 кг?

Введите обозначения, напишите отношения между группами, изобразите их в виде кругов Эйлера. (Одна спортсменка сказала, что и без теории множеств любую задачку решит легко. Как вы думаете, можно ли решить эту задачу легко и быстро без теории множеств и без знания математики?)

Часть II

Арифметика

Глава 2

Основы математики. Арифметика

2.1 Математический тест на арифметические операции

Тест для окончивших 3 класса общеобразовательной школы

Наличие чисел с большим количеством цифр в примерах не прихоть, а необходимое и обоснованное требование для дальнейших умений, например, для хорошего оперирования с десятичными дробями. Рассмотрите пример:

Пусть дана десятичная дробь 549,1736(56346). Далее:

$$0{,}1736 = \frac{1736}{10000}; \qquad 0{,}0000(56346) = \frac{56346}{999990000};$$

$$\frac{1736 \cdot 99999 + 56346}{999990000} = \frac{173598264 + 56346}{999990000} = \frac{5\,788\,487}{33\,333\,000}$$

Как вы видите, для выполнения операций с дробями вы уже должны не боятся длинных чисел. Поэтому сначала добейтесь свободного владения нижеприведенными элементарными арифметическими операциями вне зависимости от количества цифр в числе.

Задача № 97. Сложите числа:

1) $0+1$	5) $37+49$	9) $458+691$	13) $2487+3409$
2) $3+2$	6) $25+17$	10) $356+751$	14) $5621+7365$
3) $8+5$	7) $48+71$	11) $289+946$	15) $9650+3432$
4) $7+9$	8) $62+85$	12) $539+199$	16) $5674+8691$

17) $130\,987 + 125\,634$
18) $3\,524\,312 + 9\,078\,564$
19) $856\,876\,879 + 156\,276\,374$
20) $2\,345\,687\,856 + 1\,099\,882\,301$
21) $100\,099\,882\,301 + 100\,099\,301$
22) $9\,000\,780\,032\,135 + 90\,347\,831$
23) $45\,734\,752\,135 + 3\,247\,032\,131$
24) $76\,573\,457\,135 + 7\,856\,875\,671$

Задача № 98. Найдите разность чисел:

1) $1-0$	5) $97-49$	9) $458-291$	13) $2487-1409$
2) $7-2$	6) $84-31$	10) $531-738$	14) $8824-1005$
3) $6-3$	7) $48-19$	11) $944-207$	15) $7873-2210$
4) $8-1$	8) $73-25$	12) $378-631$	16) $5043-3211$

17) $130\,987 - 125\,634$
18) $3\,524\,312 - 2\,078\,560$
19) $856\,876\,879 - 156\,276\,314$
20) $2\,345\,687\,856 - 109\,988\,301$
21) $4\,500\,000\,000 - 1$
22) $10\,230\,451\,023 - 98\,769\,987$
23) $4\,637\,132\,301 - 47\,998\,809$
24) $386\,535\,835 - 873\,568\,877$

Задача № 99. Найдите произведение чисел:

1) $0 \cdot 1$
2) $2 \cdot 4$
3) $5 \cdot 3$
4) $7 \cdot 9$
5) $37 \cdot 49$
6) $24 \cdot 11$
7) $62 \cdot 30$
8) $71 \cdot 55$
9) $458 \cdot 691$
10) $732 \cdot 271$
11) $477 \cdot 905$
12) $669 \cdot 711$
13) $2487 \cdot 3409$
14) $1721 \cdot 2801$
15) $3091 \cdot 2119$
16) $5644 \cdot 1992$
17) $130\,987 \cdot 125\,634$
18) $3\,524\,312 \cdot 9\,078\,564$
19) $856\,876\,879 \cdot 156\,276\,374$
20) $2\,345\,687\,856 \cdot 1\,099\,882\,301$
21) $100\,099\,882\,301 \cdot 100\,099\,882\,301$
22) $9\,000\,780\,032\,135 \cdot 9\,034\,780\,032\,131$

Задача № 100. Найдите частное чисел:

1) $22 : 11$
2) $69 : 3$
3) $72 : 4$
4) $81 : 9$
5) $48 : 4$
6) $406 : 7$
7) $1197 : 57$
8) $2622 : 38$
9) $18\,016 : 32$
10) $24\,211 : 71$
11) $24\,605 : 35$
12) $26\,832 : 48$
13) $45\,108 : 358$
14) $307\,090 : 410$
15) $497\,154 : 534$
16) $4\,976\,410 : 802$
17) $5\,937\,888 : 5623$
18) $694\,455 : 67$
19) $51\,831 : 13$
20) $76\,736 : 2398$
21) $450\,313 : 17$
22) $6\,084\,845 : 13$

Тест для окончивших 7 классов общеобразовательной школы

Задача № 101.

1) Чему равно выражение: $\sqrt{x^2}$?
2) Вычислите и напишите решение: $\frac{9/99}{33/3}$.
3) Вычислите и напишите решение: $(15^2 + 3) - 227 \cdot (25^2) + 5$.
4) Найдите все корни уравнения, напишите решение: $7y = -14x$.
5) Вычислите, напишите решение: $4 + (7) - |-5| + |-3| - (-4) - 0$.
6) Имеют ли смысл выражения: 0^0, $\frac{1}{0}$? Если да, то напишите ответ.
7) Представьте в виде числа: $6 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$.
8) Разложите число 27 720 на простые множители. Напишите решение.
9) Напишите признаки делимости чисел на 3, 4 и 9.
10) Напишите первые десять простых чисел.
11) Равны ли следующие выражения:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11, \qquad 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1, \qquad 27\,720?$$

12) Найдите НОД чисел $n = 12$, $m = 18$. Напишите решение.
13) Напишите алгоритм возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5. Возведите 15^2.

2.2 О математической символике

Арифметика (*греч. arithmetika*, от *arithmys* — число) — наука о числах, в первую очередь о натуральных (целых положительных) числах и (рациональных) дробях и действиях над ними.

Владение понятиями чисел и умение производить действия с числами необходимы для практической и культурной деятельности любого современного человека. Поэтому арифметика является необходимым элементом воспитания детей и обязательным предметом школьной программы.

С помощью чисел конструируются многие математические понятия (например, основное понятие математического анализа — действительное число). В связи с этим арифметика является одним из базисов всех точных наук. Арифметика тесно связана с алгеброй, в которой, в частности, изучаются действия над числами без учёта их индивидуальных свойств, которые составляют предмет чисел теории.

Начинать изучение любой точной науки необходимо с усвоения символики этой науки. Велика роль математической символики в процессах обмена информацией между математиками всего мира, говорящих на разных естественных языках (русском, английском, немецком, китайском и др.). Дело в том, что смысл и содержание каждого стандартного математического символа (знака) устанавливается точно и недвусмысленно в мировом масштабе (по соглашению между математиками и учеными всего мира). Поэтому правильная арифметическая или алгебраическая (символическая) запись воспринимается одинаково всеми математиками независимо от того, на каком естественном языке они мыслят.

Математические истины (понятия, термины, предложения, рассуждения, логические выводы, и т. д.), изложенные на вербальном (символьном) уровне, записываются кратко, сжато и точно с помощью математических символов (знаков, условных обозначений).

Для изображения чисел используются специальные символы, которые называются *цифрами* (0, 1, 2, 3, 4, . . . , 9). Т. е. число изображается цифрами, например, число 379 изображено цифрами 3, 7 и 9. Цифр всего 10, но ими можно записать любое число, используя правила записи.

Величины обозначаются прописными или строчными буквами латинского алфавита (A, B, C, . . . , X, Y, Z; a, b, c, . . . , x, y, z) или греческого алфавита (A, α — альфа; B, β — бета, Γ, γ — гамма, Δ, δ — дельта; . . . ; Ω, ω — омега).

Для изображения чисел буквами используется специальное надчеркивание: $\overline{abc}$ например запись $352 = \overline{abc}$ означает, что $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$.[1]

[1]Так пишут, потому что запись «abc» обычно обозначает перемножение чисел a, b и c, о чём мы поговорим позже.

Математические операции (действия) над величинами обозначаются специальными символами: «+» (плюс), «−» (минус), «×», «·» (умножение), «:» (деление) и некоторыми другими.

Сложение — одна из основных операций в разных разделах математики, позволяющая объединить два объекта (в простейшем случае — 2 числа).

Вычитание — одно из четырех арифметических действий; операция, обратная сложению. Обозначается знаком минус «−».

Операции сравнения между величинами обозначаются символами «=» (равно), «>» (больше), «<» (меньше), «⩾» (больше или равно), «⩽» (меньше или равно) и «≠» (не равно).

2.3 Ряд натуральных чисел

Простой счет. Чтобы узнать, сколько пальцев на руках или сколько звезд на небе, мы должны сосчитать их. Счет состоит в том, что, отделяя один предмет за другим (на самом деле, письменно или мысленно), мы называем каждый раз число отделенных предметов. Так, считая пальцы на руках, мы отделяем мысленно один палец за другим и говорим: один, два, три, четыре и т. д. Если при отделении последнего пальца мы сказали, например, десять, то значит, на двух руках 10 пальцев; число 10 есть в этом случае результат счета. Мы принимаем за очевидную истину, что результат счета не зависит от того порядка, в каком мы считаем предметы. Так, считая книги на столе, мы получим одно и то же число независимо от того, считаем ли мы от передних к нам книг на столе к задним или от задних к передним. Важно только, чтобы при счете ни одна книга не была пропущена и ни одна не сосчитана два раза.

Любое *натуральное число* n получается в процессе естественного (простого) счета, т. е. путем многократного последовательного сложения единицы:

$$\underbrace{1+1+1+1+\ldots+1+1}_{n \text{ раз } (n\text{-кратно или } n \text{ повторений})} = n \quad \text{(натуральное число).}$$

Пример № 16. $1+1+1=3$.

Определение 12. *Число* — количественная характеристика объектов реального и абстрактного миров.

Число — понятие, используемое при подсчете. Это количественная характеристика при ответе на вопрос сколько? (много или мало?) имеется объектов или процессов. Понятие «число» — одно из основных понятий математики и вообще любой науки.

Для счета предметов применяют *натуральные числа*. Мы будем пользоваться числами, записываемыми арабскими (индийскими) цифрами: 1, 2, 3, . . . , 10, 11, 12, 13, . . . , N; но ранее существовали и другие цифры (например, этрусские (римские)).

Запомним названия чисел. Первые десять чисел натурального ряда носят следующие названия: один — 1, два — 2, три — 3, четыре — 4, пять — 5, шесть — 6, семь — 7, восемь — 8, девять — 9, десять — 10 (или десяток).

При счете натуральные числа называют (записывают) по порядку и без пропусков: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . . Такую запись называют *рядом натуральных чисел*.

На первом месте в натуральном ряду стоит число 1, за ним следует число 2, затем число 3 и т. д. В натуральном ряду есть первое число 1, но нет последнего числа — за каждым натуральным числом следует еще одно натуральное число, большее предшествующего на единицу. Поэтому все натуральные числа записать невозможно, и при записи натурального ряда выписывают подряд несколько первых чисел, после которых ставят многоточие. Отсутствие предметов для счета условились обозначать числом нуль (0). *Нуль не считают натуральным числом.*

Любое натуральное число можно записать с помощью десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в десятичной позиционной системе счисления, в которой значение цифры зависит от её места в записи числа. Например, цифра 4 означает: 4 единицы, если она стоит на последнем месте в записи числа (в самом правом, в разряде единиц); 4 десятка, если она стоит на предпоследнем месте (в разряде десятков); 4 сотни, если она стоит на третьем месте от конца (в разряде сотен) и т. д. В записи числа 444 самая правая цифра означает «4 единицы», цифра по центру — «4 десятки» и цифра слева — «4 сотни». Вся запись читается «четыреста сорок четыре».

Из двух натуральных чисел меньше то, которое при счёте по-возрастающей называют раньше, и больше то, которое при счёте называют позже. Число 4 меньше, чем 7, а число 8 больше, чем 7. Единица — самое маленькое натуральное число. Итак, выведем правило определения какое число больше.

Определение 13. Из двух чисел меньше то, которое в натуральном ряду встречается раньше, и больше то, которое в натуральном ряду встречается позже.

Посмотрите на первые числа ряда: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . . Число 5 стоит раньше чем 7 в натуральном ряду, поэтому 5 меньше 7, а число 4 встречается позже 1, поэтому 4 больше 1.

Первая цифра справа в десятичной записи числа называется цифрой первого разряда, вторая цифра справа — цифрой второго разряда и т. д. Каждые 10 единиц любого разряда составляют одну единицу следующего (более высокого) разряда. Например, число 12 состоит из двух разрядов: 2 это циф-

ра первого разряда, а 1 — цифра второго разряда, она в старшем разряде. Первую цифру слева в записи натурального числа называют цифрой высшего разряда. Она всегда отлична от нуля. В нашем примере (с числом 12) цифру 1 называют цифрой высшего разряда.

Чтобы прочитать многозначное число, цифры в его записи разбивают справа налево на группы по три цифры в каждой. Эти группы называют *классами*. В каждом классе цифры справа налево обозначают единицы, десятки и сотни этого класса. Первый класс справа называют классом единиц, второй — классом тысяч, третий — классом миллионов, четвертый — классом миллиардов и т. д.

Цифра 0 означает отсутствие единиц данного разряда в десятичной записи числа. Она служит и для обозначения числа «нуль». Число 0 означает «ни одного» (т. е. отсутствие предметов).

В числе 234 098 есть два класса, т. е. это число мы разбиваем на группы по 3 цифры и получаем 2 класса. Здесь 234 — один класс, и 098 — другой. В классе 098 — число единиц равно 8, число десятков равно 9, а сотен нет, так как там стоит 0.

Чтобы изобразить цифрами число, условились писать: простые единицы — на первом месте справа, десятки — на втором месте справа, сотни — на третьем месте; например: число «тридцать четыре» изобразится как 34, «триста сорок семь» изобразится как 347, «пять тысяч семьсот восемьдесят семь» — 5 787.

Все цифры, кроме нуля, называются значащими цифрами.

Если запись натурального числа состоит из одного знака — одной цифры, то его называют однозначным. Например, числа 1, 5, 8 — однозначные. Если запись числа состоит из двух знаков — двух цифр, то его называют двузначным. Например, числа 14, 33, 28, 95 — двузначные. Так же по числу знаков в данном числе дают названия и другим числам: числа 386, 555, 951 — трёхзначные; числа 1346, 5787, 9999 — четырёхзначные и т. д. Двузначные, трёхзначные, четырёхзначные, пятизначные и т. д. числа называют многозначными.

Любой ребенок умеет считать до 100, а вот до тысячи уже не любой. Научимся считать до тысячи и далее. Когда считаемых предметов более тысячи, то составляют из них столько тысяч, сколько можно; затем считают тысячи и оставшиеся единицы и называют число тех и других; например: триста сорок тысяч восемьсот шестьдесят три единицы (340 863). Тысяча тысяч составляет миллион (1 000 000), тысяча миллионов — миллиард (или биллион) (1 000 000 000), тысяча миллиардов — триллион (1 000 000 000 000) и т. п.

Задача № 102. Вычислите: 1) $1+1+1+1$; 2) $1+1+1+1+1$; 3) $1+1+1+1+1+1+1+1$.

Обозначение чисел, превосходящих тысячу. Пусть требуется написать число: тридцать пять миллиардов восемьсот шесть миллионов семь тысяч шестьдесят три единицы. Его можно написать при помощи цифр и слов так: 35 миллиардов 806 миллионов 7 тысяч 63 единицы. Чтобы можно было обойтись совсем без слов, условились: во-первых, числа миллиардов, миллионов, тысяч и простых единиц писать рядом, в одну строчку, слева направо и, во-вторых, изображать каждое из этих чисел всегда тремя цифрами, т. е. вместо 63 единиц писать 063, вместо 7 тысяч писать 007 и т. п. Тогда наше число изобразится так: 035 806 007 063. Впрочем, и здесь с левой стороны нулей не пишут, т. е. изображают наше число так: 35 806 007 063. При этом запоминают, что первые справа три цифры означают число единиц, следующие влево три цифры означают число тысяч, следующие за этими три цифры — число миллионов и т. д. Например:

— 567 002 301 означает 567 миллионов 2 тысячи 301 единица;

— 15 000 026 — 15 миллионов 26 единиц;

— 2 008 001 020 — 2 миллиарда 8 миллионов 1 тысяча 20 единиц, и т. п.

Затем следуют названия: квадриллион (тысяча триллионов), квинтиллион (тысяча квадриллионов), секстиллион (тысяча квинтиллионов) и т. д.

Как прочитать число, написанное длинным рядом цифр. Чтобы легче прочитать число, изображенное длинным рядом цифр, например такое: 5 183 000 567 029, мысленно отделяют в нем справа (например запятой, поставленной сверху) по три цифры до тех пор, пока можно: 5’183’000’567’029. Первая справа запятая заменяет слово «тысяч», вторая — «миллионов», третья — «миллиардов», четвертая — «триллионов». Значит, наше число должно быть прочтено так: 5 триллионов 183 миллиарда 567 тысяч 29 единиц. К последнему числу обыкновенно не добавляют слова «единиц». Если то же число записано так, что через каждые три цифры, считая справа, оставлен промежуток: 5 183 000 567 029, то его легко прочитать, и не ставя запятых.

Значение мест, занимаемых цифрами. При указанном способе писания чисел каждое место, занимаемое цифрой, имеет свое особое значение, а именно:

на	1-м	месте справа ставятся	простые единицы
на	2-м	месте справа ставятся	десятки
на	3-м	месте справа ставятся	сотни
на	4-м	месте справа ставятся	единицы тысяч
на	5-м	месте справа ставятся	десятки тысяч
на	6-м	месте справа ставятся	сотни тысяч
на	7-м	месте справа ставятся	единицы миллионов
на	8-м	месте справа ставятся	десятки миллионов
на	9-м	месте справа ставятся	сотни миллионов
на	10-м	месте справа ставятся	единицы миллиардов

и т. д.

Как пример рассмотрим число 7 006 009 053 — 7 миллиардов 6 миллионов 9 тысяч 53 единиц.

место справа	**величина**	**пример**
1	единицы	7006009053
2	десятки	7006009053
3	сотни	7006009053
4	единицы тысяч	7006009053
5	десятки тысяч	7006009053
6	сотни тысяч	7006009053
7	единицы миллионов	7006009053
8	десятки миллионов	7006009053
9	сотни миллионов	7006009053
10	единицы миллиардов	7006009053

Мы видим, таким образом, что наша система обозначения основана на употреблении десяти цифр, которым приписывается двоякое значение: *одно — в зависимости от начертания цифры, другое — в зависимости от места*, занимаемого цифрой; а именно: из двух написанных рядом цифр левая означает единицы, в 10 раз больше, чем правая. Такая система счисления называется *позиционной*, *т. е. значение зависит от позиции — положения цифры*, но существуют и не позиционные системы счисления, например римские цифры.

2.4 Римские цифры

Этрусские цифры стали использоваться древними римлянами в своей непозиционной системе счисления и стали называться римскими цифрами.

Натуральные числа записываются при помощи повторения римских цифр. Это не позиционная система счисления. Система римских цифр основана на

употреблении особых знаков для десятичных разрядов. Римляне употребляли для обозначения чисел только следующие семь знаков: $\mathrm{I} = 1$, $\mathrm{X} = 10$, $\mathrm{C} = 100$, $\mathrm{M} = 1000$ и их половин $\mathrm{V} = 5, \mathrm{L} = 50, \mathrm{D} = 500$. Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр. Римский способ выражать числа существенно отличался от нашего. У нас цифры изменяют свое значение с переменой места, а в римской нумерации цифры на всяком месте сохраняют свое значение. Когда написано несколько римских цифр рядом, то число, выражаемое ими, равно сумме чисел, выражаемых каждой цифрой; например, XXV означает сумму $10 + 10 + 5$, т. е. 25; CLXV означает сумму $100 + 50 + 10 + 5$, т. е. 165, и т. п.

Исключение из этого правила составляют только следующие 6 чисел: $4 = \mathrm{IV}$, $9 = \mathrm{IX}$, $40 = \mathrm{XL}$, $90 = \mathrm{XC}$, $400 = \mathrm{CD}$, $900 = \mathrm{CM}$.

В этих изображениях значение левой цифры вычитается из значения правой. После этого понятны будут следующие изображения чисел: $\mathrm{IX} = 9$, $\mathrm{XIX} = 19$, $\mathrm{LXXXIV} = 84$.

Итак, если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются (принцип сложения), если же меньшая — перед большей, то меньшая вычитается из большей (принцип вычитания). Последнее правило применяется только во избежание четырёхкратного повторения одной и той же цифры. Например, $\mathrm{I}, \mathrm{X}, \mathrm{C}$ ставятся соответственно перед $\mathrm{X}, \mathrm{C}, \mathrm{M}$ для обозначения $9, 90, 900$ или перед $\mathrm{V}, \mathrm{L}, \mathrm{D}$ для обозначения $4, 40, 400$. Например, $\mathrm{VI} = 5 + 1 = 6$, $\mathrm{IV} = 5 - 1 = 4$ (вместо IIII). $\mathrm{XIX} = 10 + 10 - 1 = 19$ (вместо XVIIII), $\mathrm{XL} = 50 - 10 = 40$ (вместо XXXX), $\mathrm{XXXIII} = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 33$ и т. д. Но принцип вычитания не действует в остальных случаях! Например, неправильно писать ID, а правильно — $499 = \mathrm{CDXCIX}$. Выполнение арифметических действий над многозначными числами в этой записи весьма неудобно. Система римских цифр в настоящее время не применяется, за исключением, обозначения веков (XVI век и т. д.), годов н. э. (MCMLXXVIII и т. п.), месяцев при указании дат (например, 1.V.1979) и нумерации в учебниках.

Примечание. Поскольку в записи числа римскими цифрами запрещается наличие четырех одинаковых подряд идущих цифр, это накладывает ограничения на возможность записи числа. Именно, римскими цифрами возможно записать только числа от 1 до 3999. Чтобы записывать большие числа вводится правило, по которому число тысяч изображается так же, как число единиц, только с правой стороны, внизу ставят букву m (mille — тысяча); например: $\mathrm{CLXXX}_m\mathrm{CCCLXIV} = 180\,364$. Аналогично поступают с миллионами, миллиардами и т. д., ставя после них букву m. В этом случае римские цифры представляют позиционную систему счисления!

Таблица 2.1. Примеры записи натуральных чисел римскими цифрами

Римские цифры	Арабские цифры	Римские цифры	Арабские цифры
I	1	XI	11
II	2	XII	12
III	3	XIII	13
IV	4	XIV	14
V	5	XV	15
VI	6	XVI	16
VII	7	XVII	17
VIII	8	XVIII	18
IX	9	XIX	19
X	10	XX	20
XXX	30	CX	110
XXXI	31	CXXII	122
XXXVI	36	CCIII	203
XL	40	CCC	300
XLVI	46	CCCII	302
XLVII	47	CDXLV	445
L	50	CDXCVII	497
LIV	54	CDXCIX	499
LX	60	D	500
LXII	62	DCXXC	680
LXXV	75	DCXCV	695
LXXXIII	83	DCC	700
XCII	92	DCCXLIX	749
XCVIII	98	DCCC	800
XCIX	99	CM	900
C	100	M	1000
MCMLXXXIV	1984	MCX	1110
MCMLXXVIII	1978	MCL	1150
MC	1100	MCM	1900

Задача № 103. Напишите арабскими (индийскими) цифрами.

1) XVIII	5) XV	9) XV	13) XIII	17) XXII	21) III
2) XIX	6) IX	10) VI	14) VII	18) VI	22) XXV
3) XVII	7) VIII	11) III	15) II	19) XX	23) XXIX
4) XVI	8) XXI	12) XII	16) XII	20) V	24) XLII

Задача № 104. Напишите римскими цифрами.

1) 5	5) 22	9) 11	13) 3	17) 12	21) 14
2) 6	6) 21	10) 2	14) 17	18) 18	22) 26
3) 10	7) 1	11) 8	15) 4	19) 13	23) 15
4) 20	8) 7	12) 16	16) 9	20) 19	24) 23

Задача № 105. Напишите арабскими (индийскими) цифрами.

1) MCMIX	14) LIV	27) DCCLIX
2) XXIX	15) DI	28) MDCLXVI
3) CXI	16) LIX	29) CMVIII
4) XXXII	17) DXCVII	30) MXCI
5) CXII	18) LXV	31) CMVI
6) XXVIII	19) DXI	32) CI
7) CCIV	20) LXIII	33) MXV
8) XLV	21) DCXCI	34) MCCLXXXIV
9) CCCVI	22) LXXVI	35) MDCCXCIX
10) XLVIII	23) DCXCVI	36) MDCCCXXVIII
11) CCCIII	24) XCI	37) MCMLXXXVIII
12) XLVII	25) DCCVIII	
13) CDXLIV	26) XCIII	

Задача № 106. Напишите римскими цифрами.

1) 53	5) 225	9) 118	13) 389	17) 124	21) 145
2) 64	6) 219	10) 234	14) 174	18) 188	22) 264
3) 106	7) 134	11) 876	15) 434	19) 139	23) 153
4) 207	8) 76	12) 162	16) 968	20) 197	24) 233

Задача № 107. Напишите римскими цифрами.

1) 1031	6) 1578	11) 1905	16) 1940	21) 1970	26) 2100
2) 1180	7) 1653	12) 1911	17) 1941	22) 1986	27) 3000
3) 1256	8) 1793	13) 1917	18) 1945	23) 1999	28) 5468
4) 1309	9) 1812	14) 1923	19) 1953	24) 2000	29) 7254
5) 1443	10) 1898	15) 1933	20) 1959	25) 2034	30) 9587

Глава 3

Натуральные числа и действия над ними

3.1 Натуральные числа и нуль

Определение 14. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... называются *натуральными* или *целыми положительными*. Число 0 не считается натуральным, но является целым. Ряд натуральных чисел бесконечен: 1, 2, 3, ..., ∞[1].

Любое натуральное число n получается в процессе естественного (простого) счёта, то есть путём многократного последовательного сложения единицы:

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ раз } (n\text{-кратно})} = n.$$

Каждое число записывается по определенному набору правил. Эти правила называются системой счисления. Любая система счисления состоит из алфавита; алфавит — это конечный набор знаков (цифр).

$$\underbrace{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}_{\text{цифры}} \text{ — десятичная система (всего в ней 10 знаков).}$$

Пример № 17. 528 — натуральное число, состоящее из цифр 5, 2 и 8.

В математике используются различные виды записей. Запись $abcd$ означает произведение этих четырех чисел, записанных буквами, в то время как запись $\overline{abcd}$ означает, что a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков и d — цифра единиц в позиционной системе счисления.

Итак, $abcd = a \cdot b \cdot c \cdot d$; $\overline{abcd} = 5741$

Определение 15. *Изображение натурального числа* — это последовательность цифр из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Алгебраическая запись изображения числа имеет вид

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}.$$

В ней

— каждая цифра изображается буквой латинского алфавита, например a, b, c, ..., x, y, z, или

[1] Знак «∞» обозначает бесконечность, но не является членом ряда натуральных чисел

— буквы последовательности нумеруются (индексируются) справа налево неотрицательными целыми числами (0, 1, 2,. . . , n); количество цифр в последовательности (изображении числа) равно $n + 1$;
— номер буквы (индекс) указывает на позицию (разрядное место), которую занимает данная буква в последовательности;
— буква с бóльшим номером представляет цифру в старшем разряде по отношению к цифре в меньшем разряде.
— младшие разряды записываются справа, старшие — слева; цифра в самом старшем разряде не может быть нулём.

Итак, $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}$ — изображение $(n{+}1)$-значного числа, $a_n \neq 0$. Горизонтальная черта над изображением показывает, что это — запись числа, а не произведение членов.

Определение 16. Количество цифр, содержащихся в изображении числа, называется *значностью* числа. Т. е. трёхзначное число это $\overline{a_2 a_1 a_0}$, а четырехзначное — $(\overline{a_3 a_2 a_1 a_0})$.

Пример № 18.

2 — однозначное число. $(\overline{a_0})$
48 — двузначное число. $(\overline{a_1 a_0})$
8945 — четырёхзначное число. $(\overline{a_3 a_2 a_1 a_0})$

Каждый разряд числа имеет свой собственный смысл: первый разряд (цифра a_0) имеет значение единиц, второй (a_1) — десятков, третий (a_2) — сотен, четвертый (a_3) — тысяч, и т. д.

Пример № 19. Число 78 состоит из 7 десятков и 8 единиц:

$$\overline{a_1 a_0} = 78 = 7 \text{ десятков} + 8 \text{ единиц} = 7 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

Число 3278 состоит из 3 тысяч, 2 сотен, 7 десятков и 8 единиц:

$$\overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = 3278 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

Задача № 108. Напишите сколько и каких разрядов у следующих чисел:

1) 13	5) 1397	9) 13 037	13) 9 641 397
2) 54	6) 2468	10) 34 544	14) 36 902 468
3) 670	7) 10 864	11) 56 673	15) 95 810 864
4) 709	8) 76 502	12) 701 709	16) 190 003 802

3.2 Сравнение натуральных чисел

О двух натуральных числа можно сказать равны они или нет. Числа равны, если они имеют одинаковую запись, и не равны в противном случае. Например, $1672 = 1672$, но $1672 \neq 2878$.

Результат сравнения двух чисел записывают не только в виде равенства или неверного равенства, но и в виде *неравенства*, применяя знаки $<$ (меньше) и $>$ (больше).

Пусть a и b — натуральные числа. Число b считается большим числа a, если оно находится в ряду натуральных чисел правее, чем число a. При этом пишут $b > a$ и говорят «b больше a» или пишут $a < b$ и говорят «a меньше b».

Кроме этого определения для сравнения двух натуральных чисел по их записи пользуются следующими правилами.

1) Числа равны, если у них одинаковое количество разрядов и цифры соответствующих разрядов одинаковые.
2) Из двух чисел больше то, у которого количество разрядов больше.
3) Из двух чисел с одинаковым количеством разрядов больше то, у которого цифра высшего разряда больше.
4) Если цифры высшего разряда двух чисел (с одинаковым количеством разрядов) одинаковые, то для сравнения этих чисел надо обратиться к наибольшему разряду, для которого цифры данных чисел различны. То из чисел больше, у которого цифра этого разряда больше.

Пример № 20. 1) Из двух натуральных чисел больше то, у которого разрядов больше. Например, $10091 > 909$ потому, что число 10091 содержит разрядов больше, чем число 909.

2) Из двух натуральных чисел с одинаковым числом разрядов больше то, у которого больше первая (слева направо) из неодинаковых цифр: $456 > 356$
3) Два натуральных числа равны, если у них одинаковое число разрядов и цифры одинаковых разрядов равны: $45 = 45$

Числа иногда удобно обозначать буквами латинского алфавита. Если число a больше числа b, то пишут $a > b$ и говорят: «a больше b» или пишут $b < a$ и говорят: «b меньше a».

Число 3 меньше, чем 6, и одновременно больше, чем 2. Это записывают в виде *двойного неравенства*: $2 < 3 < 6$. Читается «три больше двух, но меньше шести». Так как нуль меньше, чем единица, то записывают $0 < 1$.

Пример № 21. Число 5678 больше, чем 678, потому что 5678 — четырёхзначное число, а 678 — трехзначное. Числа 5678 и 7834 — четырёхзначные, но $7834 > 5678$, потому что в первом числе больше тысяч, чем во втором. В четырёхзначных числах 2365 и 2316 поровну тысяч и сотен, но десятков в первом числе больше, и потому $2305 > 2186$.

Так же используются знаки $\approx$, $\geqslant$, $\leqslant$, $\equiv$, но мы их изучим позже.

Задача № 109. Ответьте на вопросы:
1) какое из натуральных чисел наименьшее?
2) какое число меньше 1?
3) какое число больше — двузначное или пятизначное?
4) как сравнивают числа с одинаковым количеством знаков?
5) есть ли число, большее, чем миллиард миллиардов?

Задача № 110. Поставьте соответствующий знак сравнения между числами, вместо вопросительного знака.

1) 12 ? 35	5) 5139 ? 110	9) 3159 ? 1150
2) 54 ? 21	6) 2468 ? 2467	10) 7468 ? 7467
3) 510 ? 1051	7) 10842 ? 10842	11) 188 842 ? 165 842
4) 791 ? 791	8) 10821 ? 18646	12) 350 821 ? 350 821

Каждое натуральное число a больше нуля; это записывают так: $a > 0$. Число, большее нуля, называют положительным. Поэтому натуральные числа называют еще целыми положительными числами. Число нуль также целое, но не положительное. Натуральные числа и число нуль называют еще целыми не-отрицательными числами, так как, кроме неотрицательных чисел, есть еще и отрицательные числа. Они будут изучаться в дальнейшем.

3.3 Операции над числами

3.3.1 Сложение

Если мы хотим сложить палочки, лежащие на земле в одно лукошко, то мы будем брать палочки и складывать их вместе на дно лукошка. В лукошке окажется определенное количество сложенных вместе палочек. Мы их сложили вместе.

Единицы, из которых составлено несколько чисел, могут быть объединены в одну кучку, объединение, собрание. Число, которое получится после счета всех единиц этого собрания, называется суммой, а те числа, которые соединяются в одно собрание, называются слагаемыми.

Определение 17. Пусть a и b — неотрицательные числа, тогда $c = a + b$ — их *сумма*; a — *первое слагаемое*, b — *второе слагаемое*.

Так, 3 палочки да 2 палочки могут быть соединены в одно собрание 5 палочек. Число 5 есть сумма двух слагаемых: 3 и 2. Слагаемых может быть 2, 3 и более. Слагаемые можно рассматривать как части суммы. Нахождение по нескольким данным числам одного нового числа называется арифметическим действием (для краткости мы его будем просто называть действием). Действие, состоящее в образовании суммы нескольких чисел, называется

сложением этих чисел. Знак сложения есть «+» (плюс); так, если написано: $1 + 3 + 4$, то это означает сумму чисел 1, 3 и 4. Действие сложения всегда возможно (любые числа могут быть соединены в одно собрание (кучку)) и всегда дает единственный результат.

Сложение — одна из основных операций в математике, позволяющая объединить два объекта (в простейшем случае — два числа). Более строго сложение — бинарная операция, определенная на некотором множестве, элементы которого мы будем называть числами, при которой двум числовым аргументам (слагаемым) a и b сопоставляется итог (сумма), обычно обозначаемая $a + b$. В алгебре, сложением может называться любая бинарная коммутативная и ассоциативная операция.

Основное свойство суммы. Сумма не изменяется от перемены порядка слагаемых.

Так, сумма 2+3+5 всегда равна 10, в каком бы порядке мы ни производили сложение:

$$2 + 3 + 5 = 2 + 5 + 3 = 3 + 5 + 2 = 3 + 2 + 5 = 5 + 2 + 3 = 5 + 3 + 2 = 10.$$

Свойство это принято называть *переместительным законом сложения*, так как оно состоит в том, что слагаемые можно перемещать, не изменяя суммы.

В общем виде это свойство для трех слагаемых можно записать так:

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a,$$

где под буквами подразумеваются какие угодно числа.

Задача № 111. Вычислите:

1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5$	4) $7 + 9 + 11 + 13$	7) $10 + 8 + 6 + 4 + 2$
2) $5 + 4 + 3 + 2 + 1$	5) $13 + 9 + 7 + 11$	8) $11 + 13 + 7 + 8 + 2$
3) $5 + 1 + 4 + 2 + 3$	6) $2 + 4 + 6 + 8 + 10$	9) $5 + 34 + 7 + 2 + 1$

Сумма не изменится, если какую-либо группу слагаемых мы заменим их суммой. Например, сумма $5 + 7 + 2$ не изменится, если мы слагаемые 7 и 2 заменим их суммой: $5 + 7 + 2 = 5 + 9 = 14$.

Это свойство называется *сочетательным законом сложения*, так как оно состоит в том, что любые слагаемые мы можем сочетать (соединять) в одно число (в одну группу). В общем виде это свойство для трех слагаемых можно записать так:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

где скобками указано, в каком порядке надо произвести сложение: сначала сделать сложение, указанное внутри скобок, а затем сложение, указанное вне скобок.

Задача № 112. Равны ли правые и левые части?

1) $1+2+3+4+5$? $3+7+5$
2) $5+4+3+2+1$? $5+7+3$
3) $5+1+4+2+3$? $10+5$
4) $7+9+11+13$? $16+11$
5) $13+9+7+11$? $13+16+12$
6) $2+4+6+8+10$? $6+14+10$
7) $10+8+6+4+2$? $10+18+2$
8) $22+8+23+7+24+6$? $30+30+30$

Задача № 113. Вычислите.

1) $1+2+3+4+9$
2) $5+4+7+3+13$
3) $5+1+10+5+8$
4) $11+13+11+3$
5) $13+9+7+16$
6) $2+7+6+8+10+14+10$
7) $10+6+6+4+5+18+2$
8) $2+8+23+7+24+6+3+10$

Если мы получили сумму чисел, то можно ли к ней прибавить другие числа? Из основных свойств суммы можно вывести следующие два правила.

1) Чтобы прибавить к какому-нибудь числу сумму нескольких чисел, можно прибавить к этому числу каждое слагаемое одно за другим. Так, $100 + (20+7+3) = 100+20+7+3$.

В самом деле, на основании изученного свойства правая часть написанного равенства не изменится, если мы в ней слагаемые 20, 7 и 3 соединим в одну группу; но, сделав это, мы получим как раз левую часть написанного равенства.

Задача № 114. Равны ли правые и левые части?

1) $8+(1+2+3)$? $8+1+2+3$
2) $5+(4+3+2)$? $5+4+3+2$
3) $9+(3+4+7+3)$? $9+3+4+7+3$
4) $7+(5+8+4)$? $7+7+5+8+4$
5) $14+(6+3+11)$? $14+16+3+11$
6) $2+(3+7+2+10)$? $2+3+7+2+10$
7) $13+(8+5+4+2)$? $13+8+5+4+2$
8) $67+(8+7+13+2)$? $67+8+7+13+2$

Но можно прибавить и сумму нескольких чисел к какому-нибудь числу, т. е. просто мы поменяли местами слагаемые, а результат вычисляется также.

Задача № 115. Равны ли правые и левые части?

1) $(1+2+3)+7$? $1+2+3+7$
2) $(4+3+2)+17$? $4+3+2+17$
3) $(3+4+7+3)$? $9+3+4+7+3$
4) $(5+8+4)+6$? $7+7+5+8+4$
5) $(6+3+11+13)+6$? $14+16+3+11+6$
6) $(3+7+2)+45$? $2+3+7+2+10+45$
7) $(8+5+4+2)+7$? $8+5+4+2+7$
8) $(8+11+7+13+2)+14$? $8+11+7+13+2+14$

Задача № 116. Вычислите:

1) $(1+7+3)+3$
2) $(4+6+2)+7$
3) $(3+9+7+3+2)+5$
4) $(5+8+11+5+1)+13$
5) $(6+3+5+13+9)+9$
6) $(3+7+2+7+3)+15$
7) $(8+3+4+1+4)+14$
8) $(8+6+7+8+2)+11$

2) Чтобы прибавить какое-нибудь число к сумме, можно прибавить это число к одному какому-нибудь слагаемому, оставив другие без изменения, например:

$$(35+15+20)+10=(35+10)+15+20=35+(15+10)+20=\ldots$$

Все эти суммы равны сумме $35+15+20+10$, только в некоторых из них слагаемые переставлены и некоторые из слагаемых соединены в одну группу. Поэтому на основании изученных свойств все эти суммы равны сумме $35+15+20+10$ и, значит, равны между собой.

Задача № 117. Равны ли правые и левые части?

1) $(1+2+3)+7\ ?\ 8+2+3$
2) $(3+2+7)+9\ ?\ 3+11+7$
3) $(2+4+5+3)+6\ ?\ 2+10+8$
4) $(5+8+4)+8\ ?\ 5+8+12+4$
5) $(6+3+9+5)+6\ ?\ 14+16+3+11+6$
6) $(3+7+2)+15\ ?\ 18+3+7+2$
7) $(8+7+4+1)+7\ ?\ 8+7+4+8$
8) $(2+15+7+11+4)+14\ ?\ 16+15+7+11+4$

Задача № 118. Равны ли правые и левые части?

1) $5+(1+2+6)\ ?\ 6+2+6$
2) $9+(1+2+5)\ ?\ 3+11+7$
3) $7+(2+4+5+3)\ ?\ 2+10+8$
4) $5+(5+5+7+4)\ ?\ 10+5+11$
5) $3+(6+3+9+5)\ ?\ 8+6+3+9+5$
6) $2+(3+7+8+2)\ ?\ 3+7+10+2$
7) $1+(8+7+4+1)\ ?\ 9+7+4+1$
8) $3+(2+15+7+11+4)\ ?\ 5+15+7+11+4$

Задача № 119. Вычислите:

1) $5+(1+9+6)$
2) $5+(1+2+9)$
3) $6+(2+4+3+3)$
4) $8+(5+5+6+4)$
5) $2+(6+3+9+5)$
6) $12+(3+4+8+2)$
7) $16+(8+7+4+9+7)$
8) $33+(2+8+7+11+4)$

Выясним, как произвести сложение двух однозначных чисел.

Определение 18. Чтобы найти сумму двух однозначных чисел, достаточно к одному из них прибавить все единицы другого.

Так, прибавляя к 7 все единицы числа 5, находим сумму 12. Чтобы уметь быстро складывать всякие числа, следует запомнить все суммы, которые получаются от сложения двух однозначных чисел.

Замечание. Так как нуль указывает на отсутствие единиц, то $5 + 0 = 5$ (если к пяти ничего не прибавить, то останется 5) и $0 + 5 = 5$ (если единиц не было, а затем прибавлено 5 единиц, то стало 5 единиц).

Таблица 3.1. Сложение в десятичной системе сложения (ДСС)

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Перенос «нуля» (нет переноса)

Линия переносов — перенос «единицы» в старший разряд многозначного числа.

Перенос не может быть больше 1, т. е. будет или 0, или 1.

Сложение чисел с нулём. Нуль есть число. Мы видели, что при выполнении сложения среди слагаемых может встретиться нуль; дальше мы увидим, что над нулем нам придется выполнять и другие арифметические действия. Поэтому мы теперь условимся считать нуль числом наравне с другими числами; очевидно, что нуль меньше всякого другого натурального числа.

Определение 19. Сложение любого числа с нулем или нуля с любым числом всегда дает это самое число:

$$a + 0 = a, \qquad 0 + a = a, \qquad 0 + 0 = 0.$$

Правило сложения многозначного числа с однозначным. Рассмотрим два способа сложения многозначного числа с однозначным:

1) Пусть требуется сложить 37 и 8. Для этого от 37 отделим 7 единиц и сложим их с 8; получим 15. Эти 15 единиц прибавим к 30; но 15 все равно, что 10 да 5. Прибавив 10 к 30, получим 40; прибавив к 40 еще 5, получим 45.
2) Заметив, что к 37 надо прибавить 3, чтобы получить 40, отделим 3 единицы от 8 единиц и прибавим их к 37; тогда получим 40 и еще 5 единиц, оставшихся от 8, т. е. получим 45.

Пример № 22. Метод сложения столбиком.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 37 \\ +\quad 8 \\ \hline 45 \end{array}$$

Следует привыкнуть выполнять эти действия в уме, и притом быстро. Указанные в этом параграфе два приема сложения составляют применение, как это видно из равенства:

$37+8=(30+7)+8=30+(7+8)=30+15=30+(10+5)=(30+10)+5=$ $=40+5=45$ или $37+8=37+(3+5)=(37+3)+5=40+5=45$.

Правило сложения двух многозначных чисел. Пусть требуется найти сумму двух чисел: 149 и 578. Для этого сложим простые единицы всех слагаемых, потом их десятки, затем сотни и т. д. Чтобы при этом не смешать между собой единиц различных разрядов, напишем данные числа одно под другим так, чтобы единицы стояли под единицами, десятки — под десятками, сотни — под сотнями и т. д.; под последним слагаемым проведем черту. Такая запись (нотация) называется сложение столбиком. В общем виде правило сложения столбиком выглядит так.

1) Числа $x=\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}$ и $y=\overline{b_mb_{m-1}b_{m-2}\ldots b_2b_1b_0}$ записываются «столбиком» в две строки так, чтобы цифры в одинаковых разрядах оказались друг под другом.
2) Сложение производится поразрядно, начиная с младших цифр.
3) Если сумма двух цифр в одном столбце (разряде) больше 9, то осуществляется запись младшей цифры этой суммы в данном столбце (разряде), а к старшему столбцу приписывается «единица переноса». Последовательность цифр переноса образует «верхнюю строку» — строку переносов.

В указанном примере имеем:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 149 \\ +\quad 578 \\ \hline 727 \end{array}$$

Пример № 23.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 637 \\ +\ 452 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Пример № 24. Пусть требуется найти сумму четырех чисел: 24678, 86754, 2409 и 107. Для этого сложим простые единицы всех слагаемых, потом их десятки, затем сотни и т. д. Чтобы при этом не смешать между собой единиц различных разрядов, напишем данные числа одно под другим так, чтобы единицы стояли под единицами, десятки — под десятками, сотни — под сотнями и т. д.; под последним слагаемым проведем черту:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1112} \\ 24678 \\ 87654 \\ +\ 2409 \\ 107 \\ \hline 114848 \end{array}$$

Сложив единицы, получим 28, т. е. 4 десятка и 8 единиц; 2 десятка запомним, чтобы их сложить с десятками данных чисел, а 8 единиц запишем под чертой, под единицами слагаемых. Продолжаем так действия далее.

Примечание. Если при сложении цифр какого-нибудь столбца (например десятков в данном нами примере) встретится цифра нуль, то на нее не обращают внимания, так как на прибавление нуля не изменяет имевшегося числа единиц.

Так как сумма содержит в себе все единицы слагаемых, то очевидно, что если к какому-либо слагаемому прибавим несколько единиц (а другие слагаемые оставим без изменения), то сумма увеличится на столько же единиц. Так, $5 + 8 = 13$; если к первому слагаемому прибавить 4, то получится $(5 + 4) + 8 = 9 + 8 = 17$; если прибавить 4 ко второму слагаемому (а первое слагаемое оставить без изменения), то получится: $5 + (8 + 4) = 5 + 12 = 17$; таким образом, от прибавления числа 4 к одному из слагаемых сумма увеличивается на 4 единицы (так как 17 на 4 единицы больше, чем 13).

Задача № 120. Вычислите:

1) $57 + 98$	4) $83 + 46$	7) $123 + 764$
2) $83 + 45$	5) $10 + 99$	8) $138 + 246$
3) $12 + 99$	6) $907 + 103$	9) $1000 + 9901$

10) $3094 + 1707$
11) $4712 + 5089$
12) $1587 + 9706$
13) $10\,571 + 92\,517$
14) $57\,936 + 23\,567$
15) $768\,904 + 765\,463$
16) $364\,468 + 110\,005$
17) $100\,999 + 999\,111$
18) $121\,212 + 909\,090$

Задача № 121. Вычислите:

1) $12\,309 + 98\,706$
2) $135\,705 + 24\,601$
3) $100\,018 + 990\,179$
4) $9\,030\,809 + 10\,304\,051$
5) $1\,234\,567 + 987\,654\,321$
6) $13\,579\,087 + 2\,468\,064$
7) $10\,000\,014 + 999\,999\,017$
8) $20\,903\,080\,901 + 1\,020\,304\,050\,107$

Законы сложения.

Переместительный (коммутативный) закон: от перестановки слагаемых сумма не изменяется: $a + b = b + a$.

Пример № 25. $3 + 5 = 5 + 3 = 8,\ 100 + 23 + 8 = 23 + 8 + 100 = 131.$

Сочетательный (ассоциативный) закон: в сумме нескольких слагаемых можно заключать их в скобки произвольным образом: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Пример № 26. $1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 2) + (4 + 3) = (1 + 2 + 3) + 4 = 1 + (2 + 3 + 4) = 1 + (2 + 3) + 4.$

Задача № 122. Расставьте скобки всеми возможными способами.

1) $1 + 2 + 5 + 8$
2) $8 + 3 + 4 + 6$
3) $1 + 0 + 9 + 9$
4) $9 + 0 + 1 + 0 + 3$
5) $12 + 3 + 76$
6) $1 + 3 + 24 + 6 + 80$
7) $10 + 0 + 1 + 9 + 9$
8) $2 + 0 + 90 + 10 + 50$

3.3.2 Умножение

Некоторые натуральные числа можно получить не только путём «простого счёта», но и в процессе последовательного k-кратного сложения некоторого натурального числа m, отличного от единицы:

$$\underbrace{m + m + \cdots + m}_{k \text{ раз}} = n.$$

Сумма одинаковых слагаемых называется произведением двух чисел: слагаемого m и коэффициента кратности k (числа повторных сложений).

Произведение кратко записывается так: $n = m \cdot k$. Числа m и k называются **сомножителями** числа n. В то же время, число n называется **числом, кратным числу** m с коэффициентом k, или кратным числу k с коэффициентом m. Другими словами, число n, кратно своим сомножителям m и k

и записывается в форме одинаковых слагаемых, равных k или m:

$$n = \underbrace{m + m + m + ... + m}_{k \text{ раз}} = m \cdot k,$$

$$n = \underbrace{k + k + k + ... + k}_{m \text{ раз}} = k \cdot m.$$

Такая запись произведения «$m \cdot k$» называется «*разверткой*» и, наоборот, краткая запись суммы одинаковых слагаемых в виде произведения «$m \cdot k$» называется «*сверткой*».

Пример № 27. $2 + 2 + 2 = 6$.

Задача № 123. Вычислите:

1) $5 + 5 + 5 + 5$
2) $4 + 4 + 4 + 4 + 4$
3) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
4) $3 + 3 + 3 + 3$
5) $6 + 6 + 6 + 6 + 6$
6) $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

Умножение на 0 и 1. Для любого числа a верно равенство $1 \cdot a = a$. Для любого натурального числа a справедливы равенства $a \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot a = 0$.

Законы умножения.

Коммутативный (переместительный) закон: «от перестановки множителей произведение не меняется»: $a \cdot b = b \cdot a$.

Ассоциативный, или сочетательный закон: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Дистрибутивный (распределительный) закон: «чтобы умножить сумму на сумму, необходимо каждое слагаемое одной суммы умножить на каждое слагаемое второй суммы и полученные произведения сложить»:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Задача № 124. Вычислите:

1) $5 \cdot 0$ 2) $4 \cdot 0$ 3) $0 \cdot 0$ 4) $3 \cdot 2$ 5) $6 \cdot 3$ 6) $3 \cdot 6$

Пример № 28. Пусть требуется перемножить 2 числа: $29 \cdot 6 =?$ Приведем один из способов. Представим число 29 как сумму исходных разрядов: десятков, единиц. Получим: $29 = 20 + 9$ Согласно дистрибутивному закону имеем право записать так: $29 \cdot 6 = 20 \cdot 6 + 9 \cdot 6 = 120 + 54 = 174$

Пример № 29. Перемножить 2 числа: $2974 \cdot 9 =?$ Представим число 2974 как сумму исходных разрядов: тысяч, сотен, десятков, единиц. Получим: $2974 = 2000 + 900 + 70 + 4$ Согласно дистрибутивному закону запишем: $2974 \cdot 9 = 2000 \cdot 9 + 900 \cdot 9 + 70 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 18000 + 8100 + 630 + 36 = 26766$

Пример № 30. Требуется перемножить 2 числа: $57 \cdot 34 =?$ Представим число 57 как сумму исходных разрядов: десятков, единиц. Получим: $57 = 50 + 7$, а другое число представим как $34 = 30 + 4$; Согласно дистрибутивному закону запишем: $57 \cdot 34 = (50+7) \cdot (30+4) = 50 \cdot 34 + 7 \cdot 34 = 50 \cdot 30 + 50 \cdot 4 + 7 \cdot 30 + 7 \cdot 4 = 1500 + 200 + 210 + 28 = 1938$

Задача № 125. Равны ли правая и левая части?

1) $5 \cdot 0 \ ? \ 0 \cdot 5$
2) $4 \cdot 6 \ ? \ 4 \cdot 6$
3) $0 \cdot 0 \ ? \ 0 \cdot 1$
4) $3 \cdot 2 \ ? \ 2 \cdot 3$
5) $6 \cdot 3 \ ? \ 3 \cdot 6$
6) $3 \cdot 6 \ ? \ 3 \cdot 3$

Задача № 126. Равны ли правая и левая части?

1) $5 \cdot (3 \cdot 2) \ ? \ 5 \cdot 3 \cdot 2$
2) $4 \cdot (2 \cdot 6) \ ? \ 4 \cdot 2 \cdot 6$
3) $0 \cdot (0 \cdot 1) \ ? \ 0 \cdot 0 \cdot 1$
4) $3 \cdot (7 \cdot 3) \ ? \ 3 \cdot 1 \cdot 3$
5) $4 \cdot (8 \cdot 6) \ ? \ 4 \cdot 8 \cdot 6$
6) $2 \cdot (9 \cdot 3) \ ? \ 2 \cdot 9 \cdot 2$

Задача № 127. Вычислите:

1) $2 \cdot (3 \cdot 2)$
2) $3 \cdot (2 \cdot 2)$
3) $0 \cdot (2 \cdot 1)$
4) $3 \cdot (3 \cdot 4)$
5) $1 \cdot (3 \cdot 2)$
6) $2 \cdot (4 \cdot 3)$

Задача № 128. Вычислите:

1) $2 \cdot (3 + 9)$
2) $3 \cdot (2 + 0)$
3) $0 \cdot (2 + 4)$
4) $3 \cdot (3 + 4)$
5) $1 \cdot (3 + 56)$
6) $0 \cdot (4 + 43)$
7) $5 \cdot (5 + 2)$
8) $6 \cdot (2 + 9)$
9) $8 \cdot (2 + 5)$
10) $4 \cdot (3 + 7)$
11) $7 \cdot (3 + 6)$
12) $11 \cdot (0 + 3)$

Примечание. Из ассоциативного, коммутативного и дистрибутивного законов сложения и умножения можно получить тождества более сложного вида. В этих законах содержится всё самое необходимое для работы с операциями сложения и умножения. Например, можно получить тождества:

$$a + b + c + d = d + a + c + b,$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot b \cdot c) \cdot d = a \cdot (b \cdot c \cdot d),$$

$$a(b + c + a) = a \cdot a + ab + ac.$$

Задача № 129. Вычислите:

1) $5 \cdot (3 + 2)$
2) $5 \cdot (3 - 2)$
3) $4 \cdot (2 + 6)$
4) $0 \cdot (0 + 1)$
5) $3 \cdot (7 + 3)$
6) $4 \cdot (8 + 6)$
7) $2 \cdot (9 + 3)$
8) $(9 + 3) \cdot 4$
9) $(0 + 2) \cdot 4$
10) $(3 + 4) \cdot 4$
11) $(5 + 8) \cdot 4$
12) $(4 + 4) \cdot 4$
13) $(2 + 3) \cdot 4$
14) $(1 + 6) \cdot 4$
15) $(6 + 8) \cdot 4$
16) $(7 + 5) \cdot 4$
17) $(9 + 4) \cdot 0$
18) $(8 + 0) \cdot 4$

Задача № 130. Вычислите:

1) $5\cdot(3+2+0)$	7) $2\cdot(9+3+4)$	13) $(8+3+9)\cdot 4$
2) $5\cdot(1-2+9)$	8) $0\cdot(7+6+0)$	14) $(9+6+8)\cdot 4$
3) $4\cdot(3+6+4)$	9) $5\cdot(1+3+9)$	15) $(6+8+6)\cdot 4$
4) $0\cdot(0+1+6)$	10) $(3+4+3)\cdot 4$	16) $(7+5+4)\cdot 4$
5) $3\cdot(5+3+4)$	11) $(3+8+4)\cdot 4$	17) $(1+4+2)\cdot 0$
6) $4\cdot(7+6+2)$	12) $(4+4+6)\cdot 4$	18) $(6+0+1)\cdot 4$

Задача № 131. Равны ли правая и левая части?

1) $5\cdot(3\cdot 2)\ ?\ 5\cdot 3\cdot 2$	3) $0\cdot(0\cdot 1)\ ?\ 0\cdot 0\cdot 1$	5) $4\cdot(8\cdot 6)\ ?\ 4\cdot 8\cdot 6$
2) $4\cdot(2\cdot 6)\ ?\ 4\cdot 2\cdot 6$	4) $3\cdot(7\cdot 3)\ ?\ 3\cdot 1\cdot 3$	6) $2\cdot(9\cdot 3)\ ?\ 2\cdot 9\cdot 2$

Задача № 132. Вычислите:

1) $5\cdot(1+1+0+4)$	7) $2\cdot(0+9+4+4)$	13) $(4+3+9+4)\cdot 4$
2) $5\cdot(2-2+9+1)$	8) $0\cdot(3+1+0+0)$	14) $(9+6+8+8)\cdot 4$
3) $4\cdot(3+6+4+2)$	9) $5\cdot(2+3+9+8)$	15) $(7+8+6+0)\cdot 4$
4) $0\cdot(6+6+6+4)$	10) $(3+4+3+5)\cdot 4$	16) $(4+5+4+3)\cdot 4$
5) $3\cdot(5+5+4+6)$	11) $(6+8+4+7)\cdot 4$	17) $(2+4+2+2)\cdot 0$
6) $4\cdot(8+7+2+6)$	12) $(4+4+6+9)\cdot 4$	18) $(1+0+1+4)\cdot 4$

Умножение многозначного числа на однозначное. Произведения однозначных чисел составляют таблицу умножения, которую надо помнить всегда. Вычисление произведения многозначного числа на однозначное, тем более многозначного числа на многозначное, кроме таблицы умножения требует применения законов сложения и умножения.

Пример № 31. $437\cdot 7=(400+30+7)\cdot 7=400\cdot 7+30\cdot 7+7\cdot 7=2800+210+49=$ $=(2000+800)+(200+10)+(40+9)=2000+(800+200)+(10+40)+9=$ $=(2000+1000)+50+9=3059$.

Те же действия записывают столбиком:

$$\begin{array}{r} \times\ \ 437 \\ 7 \\ \hline 49 \\ +\ \ 210 \\ 2800 \\ \hline 3059 \end{array}$$

или тоже самое можно записать более коротко:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 324} \\ \times\ \ 437 \\ 7 \\ \hline 3059 \end{array}$$

Таблица 3.2. Умножение в десятичной системе счисления

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Перенос «нуля»
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	Перенос «1»
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	Перенос «2»
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	Перенос «3»
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	Перенос «4»
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	Перенос «5»
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	Перенос «6»
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	Перенос «7»
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	Перенос «8»

Сначала умножаем единицы на однозначное число. Единицы полученного произведения записываем в результат, а десятки запоминаем или записываем сверху над десятками многозначного числа. Далее умножаем десятки исходного числа на однозначный множитель, единицы полученного произведения записываем в результат, а десятки запоминаем. Затем берем разряд сотен и так далее.

Умножение многозначных чисел. Чтобы перемножить столбиком два многозначных числа надо записать одно число под другим, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом. Затем последовательно перемножить первый сомножитель на единицы, десятки, сотни (второго сомножителя) и так далее. Полученные произведения надо записать друг под другом так, чтобы единицы следующего произведения находились под десятками предыдущего произведения.

Пример № 32.

$$
\begin{array}{rr}
\times & 2429 \\
 & 614 \\
\hline
 & 9716 \\
+ & 2429 \\
 & 14574 \\
\hline
 & 1491406
\end{array}
$$

Задача № 133. Вычислите:

1) $11 \cdot 13$;	6) $36 \cdot 69$;	11) $69 \cdot 86$;	16) $30 \cdot 601$;
2) $17 \cdot 16$;	7) $14 \cdot 95$;	12) $30 \cdot 36$;	17) $43 \cdot 713$;
3) $19 \cdot 11$;	8) $86 \cdot 18$;	13) $11 \cdot 99$;	18) $86 \cdot 476$;
4) $10 \cdot 23$;	9) $24 \cdot 11$;	14) $86 \cdot 58$;	19) $90 \cdot 312$;
5) $45 \cdot 86$;	10) $47 \cdot 54$;	15) $15 \cdot 507$;	20) $37 \cdot 199$.

Задача № 134. Вычислите:

1) $154 \cdot 407$;	4) $866 \cdot 760$;	7) $152 \cdot 107$;	10) $346 \cdot 876$;
2) $340 \cdot 501$;	5) $970 \cdot 312$;	8) $103 \cdot 401$;	11) $240 \cdot 612$;
3) $423 \cdot 613$;	6) $357 \cdot 199$;	9) $134 \cdot 713$;	12) $357 \cdot 999$.

Задача № 135. Вычислите:

1) $1010 \cdot 101$;	7) $123\,429 \cdot 8743$;	13) $100\,501 \cdot 7991$;
2) $1110 \cdot 110$;	8) $135\,790 \cdot 2467$;	14) $750\,308 \cdot 1029$;
3) $1990 \cdot 100$;	9) $100\,140 \cdot 5991$;	15) $9\,991\,119 \cdot 17\,123$;
4) $1011 \cdot 1011$;	10) $203\,082 \cdot 1029$;	16) $1\,191\,111 \cdot 19\,999$;
5) $10\,101 \cdot 10\,101$;	11) $678\,343 \cdot 8743$;	17) $9\,999\,999 \cdot 70\,123$;
6) $10\,001 \cdot 10\,001$;	12) $105\,796 \cdot 6246$;	18) $11\,111\,111 \cdot 99\,099$.

Примечание. Ученик 8-го класса московской физико-математической школы № 2 выполнил действие $99\,999 \cdot 11\,111$ письменно на бумаге без калькулятора за 1 минуту 20 секунд.

Задача № 136. Вычислите:

1) $1234 \cdot 8743$;	4) $20\,308 \cdot 10\,239$;	7) $1\,111\,191 \cdot 9\,999\,199$;
2) $13\,579 \cdot 246$;	5) $99\,308 \cdot 19\,939$;	8) $2\,030\,801 \cdot 4\,310\,239$;
3) $1001 \cdot 991$;	6) $999\,199 \cdot 1023$;	9) $99\,999\,999 \cdot 1\,111\,111$.

Задача № 137. Вычислите:

1) $11\,119 \cdot 99\,919$;	5) $101\,100 \cdot 101\,001$;	9) $2\,030\,801 \cdot 4\,310\,239$;
2) $101\,111 \cdot 101\,111$;	6) $101\,010 \cdot 101\,010$;	10) $99\,999\,999 \cdot 1\,111\,111$;
3) $101\,011 \cdot 101\,011$;	7) $100\,001 \cdot 100\,001$;	11) $98\,420\,308 \cdot 1\,023\,901$;
4) $999\,111 \cdot 233\,111$;	8) $110\,011 \cdot 110\,010$;	12) $9\,999\,999\,999 \cdot 99\,999$.

Засеките время, затраченное для получения правильного результата в задачах выше. Позже вы сможете уменьшить это время в несколько раз!

Примечание. Часто для краткости произведение n сомножителей $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначают $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ (здесь Π — греческая заглавная буква «*пи*» — символ произведения).

3.3.3 Вычитание

Что такое вычитание? Пусть у ученика было 10 тетрадей; 4 из них он отдал сестре; чтобы узнать, сколько тетрадей у него осталось, мы должны от 10 тетрадей отнять 4 тетради (у ученика остается 6 тетради).

Определение 20. Действие, состоящее в том, что от одного числа отнимается столько единиц, сколько их содержится в другом данном числе, называется *вычитанием*.

Вычитание — одно из четырех арифметических действий; операция, обратная сложению. Обозначается знаком минус «$-$».

В нашем примере из числа 10 надо вычесть число 4; получается число 6. ($10 - 4 = 6$.) Число, от которого отнимают, называется *уменьшаемым*; число, которое отнимают, называется *вычитаемым*; число, получаемое после вычитания, называется *разностью*. Разность иначе называется *остатком*.

В нашем примере уменьшаемое 10, вычитаемое 4, разность 6. Разность, это результат вычитания. Знак вычитания есть $-$ (минус); он ставится между уменьшаемым (слева) и вычитаемым (справа). Так: $10 - 4 = 6$.

Очевидно, что из данного натурального числа можно вычесть всякое натуральное число, которое меньше его или равно ему; но ни из какого натурального числа нельзя вычесть натуральное число, которое больше его. Поэтому вычитаемое не может быть больше уменьшаемого. Это обозначается символом $\geqslant$ или $\leqslant$, что означает "больше или равно" и "меньше или равно". Например, $a \geqslant b$ читается «a больше или равно, чем b», $a \leqslant b$ — «a меньше или равно, чем b».

Определение 21. Пусть a и b — неотрицательные числа, $a \geqslant b$. Тогда разностью чисел a и b называется такое число c, что $a = b + c$. Это обозначается как $c = a - b$, где c — *разность*; a — *уменьшаемое*, b — *вычитаемое*.

$a - 0 = a$, потому что $a + 0 = a$; $\quad a - a = 0$, потому что $0 + a = a$.

Сравнение вычитания со сложением. При выполнении вычитания одно число, именно уменьшаемое, разлагается на два числа. Например, если мы, отняв 5 от 9, нашли, что осталось 4, то, значит, мы разложили 9 на два числа: 5 (отнятые единицы) и 4 (оставшиеся единицы). Очевидно, что если эти два числа соединим в одно, то получим то число 9, которое разлагали; значит, уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с остатком; иначе говоря, уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и остаток - слагаемые. При сложении слагаемые даются, а сумма отыскивается; при вычитании же даются сумма и одно слагаемое, а другое слагаемое отыскивается. Значит, число, которое при сложении ищется, - при вычитании дается, и наоборот; поэтому говорят, что вычитание есть действие, обратное сложению.

Замечания.

1) Вычитание можно было бы определить сразу как действие, обратное сложению, посредством которого по данной сумме и данному слагаемому отыскивается другое слагаемое. Но в самом начале элементарного изложения арифметики представляется более простым и наглядным определить вычитание как отнимание от уменьшаемого части, равной вычитаемому, а потом уже показать соотношение между вычитанием и сложением.

2) Действие вычитания всегда возможно и дает единственный результат, если только вычитаемое не более уменьшаемого. Если, например, из a требуется вычесть b, то мы можем выполнить это, отняв от a последовательно одну за другой столько единиц, сколько содержится в b. Отняв одну единицу, получим в остатке единственное число $a-1$, непосредственно предшествующее в натуральном ряду числу a; отняв другую единицу, мы опять-таки получим единственное число $a-2$, непосредственно предшествующее числу $a-1$, и т. д. Если $b<a$, то, отняв b единиц, мы получим некоторое (и только одно) число натурального ряда, которое и будет разностью; если $b=a$, то после отнимания не останется никакого числа, другими словами, остаток будет нуль; наконец, если $b>a$, то вычитание невозможно.

Вычитание однозначного числа. Чтобы без затруднения вычитать всякое число, надо сначала научиться вычитать в уме однозначное число из однозначного и двузначного. Искомая разность легко находится посредством сложения. Например, чтобы узнать, сколько будет 15 без 8, вспомним, какое число при сложении с 8 дает 15; 8 да 7 составляет 15; значит, 15 без 8 будет 7. Следует привыкнуть выполнять это вычитание в уме и притом быстро.

Примечание. $7-0=7$ (если от 7 единиц ничего не отнять, то останется 7 единиц); вообще, при вычитании нуля из любого числа всегда получается это самое число. $8-8=0$ (если от 8 единиц отнять 8 единиц, то ничего не останется); вообще, разность двух одинаковых чисел всегда равна нулю. Из нуля нельзя вычесть никакое другое число, потому что все другие числа больше нуля.

Вычитание многозначного числа.

Пример № 33. Для вычитания столбиком надо записать числа друг под другом, как и при сложении. Затем произвести вычитание в каждом разряде.

$$\begin{array}{r} 39 \\ -\ 12 \\ \hline 27 \end{array}$$

Пример № 34. Если в каком-то разряде получается так, что уменьшаемое меньше вычитаемого, то надо занять единицу в старшем разряде. Это обозначается точкой или единицей над старшим разрядом.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 513 \\ -\ 462 \\ \hline 51 \end{array}$$

В данном случае $1 < 6$, поэтому мы занимаем в разряде сотен одну единицу и вычитаем 6 из 11, получаем 5. Затем из разряда сотен, которых осталось только 4, вычитаем 4, получаем 0.

Пример № 35. Вычислим $96378 - 32541 - 1400 - 520$:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ 96378 \\ -\ 32541 \\ 1400 \\ 520 \\ \hline 61917 \end{array}$$

Будем держаться того же порядка, как и раньше, т. е. станем вычитать единицы из единиц, десятки из десятков и т. д. 5 единиц из 3 единиц нельзя вычесть; берем от 6 десятков 1 десяток, он содержит 10 единиц, которые мы присоединяем к 3 единицам, стоящим в уменьшаемом; получается 12 единиц; из них нельзя вычесть $5 + 4 + 5 = 14$, поэтому занимаем еще один десяток от 6.

Задача № 138. Вычислите:

1) $134 - 126$
2) $234 - 206$
3) $654 - 649$
4) $243 - 102$
5) $478 - 89$
6) $864 - 11$
7) $324 - 72$
8) $976 - 102$

Задача № 139. Вычислите:

1) $23\,554 - 2267$
2) $97\,533 - 3457$
3) $45\,790 - 2456$
4) $12\,075 - 6834$
5) $10\,100 - 3468$
6) $67\,563 - 34\,567$
7) $23\,788 - 14\,321$
8) $23\,509 - 23\,508$

Задача № 140. Вычислите:

1) $1\,234\,567 - 876\,543$
2) $1\,357\,937 - 2\,468\,786$
3) $1\,000\,124 - 999\,168$
4) $2\,090\,308 - 102\,039$
5) $50\,809\,457 - 89\,732\,347$
6) $62\,000\,000 - 1$
7) $5\,724\,030\,897 - 728\,469\,040$
8) $1\,203\,080\,010\,967 - 1\,020\,904\,349$

Примечание. Из ассоциативного, коммутативного и дистрибутивного законов сложения и умножения можно получить тождества более сложного вида.

В этих законах содержится всё самое необходимое для работы с операциями сложения и умножения. Например, можно получить тождества:

$$a - b - c - d = a - c - b - d,$$
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot b \cdot c) \cdot d = a \cdot (b \cdot c \cdot d),$$
$$a(b - c - a) = ab - ac - a \cdot a.$$

Задача № 141. Вычислите:

1) $2 \cdot (9 - 9)$
2) $3 \cdot (8 - 0)$
3) $0 \cdot (7 - 4)$
4) $3 \cdot (4 - 3)$
5) $5 \cdot (6 - 5)$
6) $0 \cdot (4 - 3)$
7) $5 \cdot (5 - 2)$
8) $6 \cdot (12 - 9)$
9) $8 \cdot (8 - 5)$
10) $3 \cdot (13 - 7)$
11) $7 \cdot (10 - 6)$
12) $9 \cdot (0 - 0)$

Задача № 142. Вычислите:

1) $5 \cdot (9 - 2)$
2) $5 \cdot (7 - 2)$
3) $4 \cdot (4 - 2)$
4) $0 \cdot (0 - 0)$
5) $3 \cdot (7 - 3)$
6) $4 \cdot (8 - 6)$
7) $2 \cdot (9 - 3)$
8) $(9 - 3) \cdot 3$
9) $(6 - 2) \cdot 5$
10) $(7 - 4) \cdot 1$
11) $(8 - 8) \cdot 0$
12) $(4 - 4) \cdot 1$
13) $(9 - 3) \cdot 3$
14) $(10 - 6) \cdot 4$
15) $(16 - 8) \cdot 5$
16) $(17 - 5) \cdot 7$
17) $(9 - 4) \cdot 0$
18) $(8 - 0) \cdot 9$

Задача № 143. Вычислите:

1) $5 \cdot (3 + 2 + 0)$
2) $5 \cdot (1 - 2 + 9)$
3) $4 \cdot (3 - 6 + 4)$
4) $0 \cdot (0 + 1 + 6)$
5) $3 \cdot (5 - 3 + 4)$
6) $4 \cdot (7 - 6 + 2)$
7) $2 \cdot (9 - 3 + 4)$
8) $0 \cdot (7 - 6 + 0)$
9) $5 \cdot (1 + 3 + 9)$
10) $(3 + 4 + 3) \cdot 4$
11) $(3 + 8 + 4) \cdot 4$
12) $(10 - 4 + 6) \cdot 4$
13) $(8 - 3 + 9) \cdot 4$
14) $(9 + 6 + 8) \cdot 4$
15) $(12 - 8 + 6) \cdot 4$
16) $(7 + 5 + 4) \cdot 4$
17) $(1 - 4 + 2) \cdot 0$
18) $(6 + 0 - 1) \cdot 4$

Задача № 144. Вычислите:

1) $14\,567 - 876 - 568$
2) $9793 - 2486 - 3754$
3) $50\,124 - 9168 - 4532$
4) $290\,308 - 1039 - 6785$
5) $5\,809\,457 - 89\,732 - 7840$
6) $62\,000\,000 - 1 - 5678$
7) $574\,030\,897 - 72\,840 - 60\,980$
8) $1\,203\,010\,967 - 100\,439 - 670\,704$

Задача № 145. Вычислите:

1) $1\,234\,568 - 876\,543$
2) $1\,357\,939 - 2\,468\,786$
3) $1\,000\,125 - 999\,168$
4) $2\,090\,309 - 102\,039$
5) $50\,809\,458 - 89\,732\,347$
6) $62\,000\,001 - 7$
7) $5\,724\,030\,898 - 728\,469\,040$
8) $1\,203\,080\,010\,968 - 1\,020\,904\,349$

Задача № 146. Вычислите:

1) $14\,567 - 536 - 568$
2) $9793 - 7408 - 3754$
3) $50\,124 - 246 - 4532$
4) $290\,308 - 9041 - 6785$
5) $5\,809\,457 - 85\,642 - 7840$
6) $62\,000\,000 - 45 - 5678$
7) $574\,030\,897 - 875 - 60\,980$
8) $1\,203\,010\,967 - 425\,467 - 670\,704$

3.3.4 Вынесение общего множителя за скобки

Вынесение общего множителя за скобки основывается на дистрибутивном законе и позволяет упрощать выражения. Например: $75 \cdot 63 + 75 \cdot 37 = 75 \times \times (63 + 37) = 75 \cdot 100 = 750$, или в общем виде

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c),$$
$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c).$$

Задача № 147. Используя распределительный закон, вынесите множитель за скобки:

1) $2 \cdot 4 + 2 \cdot 7$
2) $3 \cdot 9 + 3 \cdot 8$
3) $4 \cdot 2 + 3 \cdot 4$
4) $6 \cdot 4 + 5 \cdot 6$
5) $2 \cdot 5 + 2 \cdot 9$
6) $5 \cdot 3 - 5 \cdot 3$
7) $4 \cdot 8 - 4 \cdot 8$
8) $9 \cdot 3 - 9 \cdot 3$
9) $2 \cdot 6 - 6 \cdot 2$
10) $8 \cdot 7 - 8 \cdot 14$
11) $2 \cdot 4 - 2 \cdot 4$
12) $3 \cdot 3 - 9 \cdot 9$
13) $2 \cdot 2 - 7 \cdot 7$
14) $8 \cdot 8 - 8 \cdot 8$

Задача № 148. Используя распределительный закон, вынесите множитель за скобки:

1) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 1$
2) $2 \cdot 9 + 3 \cdot 9$
3) $5 \cdot 2 + 2 \cdot 5$
4) $4 \cdot 4 + 5 \cdot 5$
5) $7 \cdot 5 + 10 \cdot 14$
6) $8 \cdot 3 - 16 \cdot 3$
7) $0 \cdot 8 - 4 \cdot 0$
8) $4 \cdot 3 - 9 \cdot 12$
9) $2 \cdot 6 - 3 \cdot 4$
10) $6 \cdot 2 - 8 \cdot 12$
11) $8 \cdot 4 - 2 \cdot 4$
12) $0 \cdot 3 - 9 \cdot 0$
13) $2 \cdot 2 - 7 \cdot 7$
14) $9 \cdot 8 - 8 \cdot 9$
15) $1 \cdot 3 - 3 \cdot 1$
16) $45 \cdot 3 - 15 \cdot 0$
17) $21 \cdot 2 - 42 \cdot 7$
18) $19 \cdot 8 - 8 \cdot 19$

Задача № 149. Используя распределительный закон, вынесите множитель за скобки:

1) $7 \cdot 4 - 7 \cdot 4$
2) $12 \cdot 3 - 12 \cdot 9$
3) $34 \cdot 7 - 7 \cdot 34$
4) $8 \cdot 12 - 12 \cdot 8$
5) $3 \cdot 4 + 3 \cdot 7$
6) $11 \cdot 5 + 11 \cdot 8$
7) $9 \cdot 2 + 3 \cdot 9$
8) $13 \cdot 4 + 11 \cdot 13$
9) $11 \cdot 5 + 11 \cdot 8 + 11 \cdot 2 + 11 \cdot 7$
10) $7 \cdot 3 - 7 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 7$
11) $11 \cdot 8 - 11 \cdot 8 + 8 \cdot 11 - 8 \cdot 11$
12) $18 \cdot 16 - 9 \cdot 3 + 36 \cdot 2 - 3 \cdot 9$
13) $222 \cdot 6 - 44 \cdot 3 + 3 \cdot 22 - 44 \cdot 6$
14) $26 \cdot 7 - 13 \cdot 14 + 26 \cdot 7 - 14 \cdot 13$

Задача № 150. Вычислите:

1) $2 \cdot 7 + 2 \cdot 14 + 4 \cdot 21 + 8 \cdot 7$
2) $3 \cdot 5 - 3 \cdot 15 + 6 \cdot 10 - 9 \cdot 5$
3) $11 \cdot 8 - 22 \cdot 8 + 33 \cdot 4 - 11 \cdot 2$
4) $2 \cdot 3 - 4 \cdot 6 + 4 \cdot 12 - 3 \cdot 9$
5) $1 \cdot 6 - 11 \cdot 3 + 33 \cdot 22 - 44 \cdot 9$
6) $3 \cdot 3 - 3 \cdot 9 + 6 \cdot 6 - 3 \cdot 12$
7) $7 \cdot 55 + 7 \cdot 35 + 14 \cdot 15 + 21 \cdot 65$
8) $30 \cdot 2 + 300 \cdot 4 + 60 \cdot 6 + 90 \cdot 8$

Задача № 151. Вычислите:

1) $12 \cdot 7 + 12 \cdot 8 + 12 \cdot 8 + 12 \cdot 7$
2) $7 \cdot 5 - 7 \cdot 5 + 5 \cdot 7 - 5 \cdot 7$
3) $9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 + 8 \cdot 9 - 8 \cdot 9$
4) $4 \cdot 16 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 9$
5) $21 \cdot 6 - 42 \cdot 3 + 3 \cdot 22 - 42 \cdot 9$
6) $11 \cdot 7 - 22 \cdot 14 + 22 \cdot 7 - 11 \cdot 14$
7) $7 \cdot 55 + 7 \cdot 45 + 3 \cdot 55 + 3 \cdot 45$
8) $644 \cdot 27 + 356 \cdot 73 + 73 \cdot 644 + 27 \cdot 356$
9) $3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 12 \cdot 24$
10) $11 \cdot 33 + 22 \cdot 33 + 11 \cdot 33 + 66 \cdot 22$
11) $17 \cdot 26 + 49 \cdot 91 + 34 \cdot 39 + 63 \cdot 238 + 51 \cdot 65 + 77 \cdot 35 + 85 \cdot 91 - 119 \cdot 68$
12) $6 \cdot 12 + 3 \cdot 63 + 9 \cdot 39 + 18 \cdot 333 + 66 \cdot 99 + 66 \cdot 3 + 93 \cdot 96 - 39 \cdot 69$

Задача № 152. Используя распределительный закон, вынесите множитель за скобки:

1) $3 \cdot 4 + 3 \cdot 7$
2) $11 \cdot 5 + 11 \cdot 8$
3) $9 \cdot 2 + 3 \cdot 9$
4) $13 \cdot 4 + 11 \cdot 13$
5) $11 \cdot 5 + 11 \cdot 8 + 11 \cdot 2 + 11 \cdot 7$
6) $7 \cdot 3 - 7 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 7$
7) $11 \cdot 8 - 11 \cdot 8 + 8 \cdot 11 - 8 \cdot 11$
8) $18 \cdot 16 - 9 \cdot 3 + 36 \cdot 2 - 3 \cdot 9$
9) $222 \cdot 6 - 44 \cdot 3 + 3 \cdot 22 - 44 \cdot 6$
10) $26 \cdot 7 - 13 \cdot 14 + 26 \cdot 7 - 14 \cdot 13$

Задача № 153. Вычислите:

1) $3 \cdot 15 + 3 \cdot 45 + 3 \cdot 55 + 3 \cdot 45$
2) $11 \cdot 27 + 356 \cdot 22 + 11 \cdot 644 + 27 \cdot 44$
3) $3 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 12 \cdot 12$
4) $11 \cdot 33 + 22 \cdot 33 + 11 \cdot 33 + 66 \cdot 22 + 22$
5) $17 \cdot 26 + 49 \cdot 91 + 34 \cdot 39 + 63 \cdot 238 + 51 \cdot 65 + 77 \cdot 35 + 85 \cdot 91 - 119 \cdot 68$
6) $2 \cdot 6 + 3 \cdot 63 + 3 \cdot 39 + 18 \cdot 33 + 6 \cdot 99 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 6 - 9 \cdot 69$

Некоторые свойства сложения и вычитания. 1) Если от какого-либо слагаемого отнимем несколько единиц (а другие слагаемые оставим без изменения), то сумма уменьшится на столько же единиц: $3 + 6 = 9$; $(3 - 1) + 6 = 8$.

2) Если к какому-нибудь слагаемому прибавим несколько единиц, а от другого слагаемого отнимем столько же единиц, то сумма останется без изменения: $3 + 6 = 9 = (3 - 1) + (6 + 1) = 2 + 7 = 9$.

3.3.5 Деление. Некоторые признаки делимости

Пусть a и b — натуральные числа, причем a больше или равно b ($a \geqslant b$). Говорят, что a делится на b нацело, если существует натуральное число c, при умножении которого на b равно a. При этом пишут $a : b = c$. Число a называют *делимым*, b — *делителем*, c — *частным*.

$a = c \cdot b, \quad a \geqslant b,\ b \neq 0 \Leftrightarrow a : b = c, \quad a \geqslant b,\ b \neq 0$. Здесь «$a$» — *делимое*, «$b$» — *делитель*, а «$c$» — *частное*.

Нуль делится на любое число; результатом будет нуль: $0 : a = 0$.

Делить на нуль нельзя!

Любое натуральное число a делится на 1 и само на себя: $a : 1 = a$, $a : a = 1$.

Делимое и делитель можно умножить или разделить на одно и то же натуральное число, частное от этого не изменится:

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n); \qquad a : b = (a : n) : (b : n).$$

Признаки делимости.

— Если число оканчивается на цифры 0, 2, 4, 6, 8, то оно делится на **2**.
— Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на **3**.
— Если две последние цифры числа образуют число, делящееся на 4, то и само число делится на **4**.
— Если число оканчивается на 0 или 5, то оно делится на **5**.
— Если число делится и на 2 и на 3, то оно делится и на **6**.
— На 8 делятся те числа, трехзначное число-окончание которых делится на **8**.
— Признак делимости *четных* чисел на **8**. Если двузначное число из цифр разрядов сотен и десятков, сложенное с половиной числа единиц, делится на 4, то и исследуемое число делится на 8. Исследуем число 3624. Делится ли оно на 8? $62 + 2 = 64 : 8 = 8 \Rightarrow 64 : 8$
— Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на **9**.
— Если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на **10**.
— Если число делится одновременно на 3 и на 4, то оно делится на **12**.
— Если число делится одновременно на 3 и на 5, то оно делится на **15**.
— Если число из двух последних цифр делится на **25**.
— Если число из трех последних цифр делится на **125**.
— Разобьём исходное число на группы по 3 цифры, начиная справа. Если разность сумм полученных троек чисел, взятых через одну, делится на 7, или на 11, или на 13, то данное число делится соответственно на **7, 11 или 13**.

Задача № 154. Исследуйте, на что делятся числа?

1) 36	8) 11 356	15) 4512	22) 108 427 424
2) 124	9) 32 642	16) 231	23) 55 258
3) 1024	10) 360	17) 1950	24) 46 928 247 795
4) 1107	11) 984	18) 56 625	25) 108 427 424
5) 209	12) 6288	19) 1001	26) 311 836 928
6) 221	13) 564	20) 55 258	27) 775 227 362
7) 350	14) 330	21) 880 572	28) 398 912 164

Деление с остатком. Разделить число a на число b — это значит найти частное $a : b$, если a делится нацело на b, или найти неполное частное и остаток, если a на b не делится.

Деление натуральных чисел можно представить как последовательное вычитание делителя из делимого до тех пор, пока разность либо станет равной делителю, либо будет меньше делителя. В первом случае имеет место деление без остатка, во втором — с остатком.

Деление без остатка можно рассматривать как деление с остатком 0.

Деление одного натурального числа m на другое натуральное число n ($m \geqslant n$) с остатком возможно всегда. В результате деления будут найдены такие натуральные числа p и r ($r < n$), что

$$m = p \cdot n + r.$$

Пример № 36.

$$6 : 2 = 3, \text{ остаток } 0;$$

$$7 : 2 = 3, \text{ остаток } 1.$$

Деление уголком. Для малых чисел деление производят в уме с помощью таблицы умножения, а для больших — уголком.

Пример № 37. Вычислим $84 : 3$. Сначала выделяем наибольшее количество десятков, которое нацело делится на 3, это 60, а затем пользуемся дистрибутивным законом. $84 : 3 = (60 + 24) : 3 = 60 : 3 + 24 : 3 = 20 + 8 = 28$. Эти действия записываются в следующей удобной форме.

Делимое записывается слева от делителя и отделяется вертикальной чертой (по высоте эта черта в две строки). Затем проводится черта под делителем, снизу от нее будет располагаться частное.

делимое | делитель

Записываем таким образом наш пример. Далее начинаем находить частное. Сначала берем число составленное из первой цифры делимого. В нашем случае это 8. Делим 8 на 3 с остатком, получаем частное 2 и остаток $8 - 3 \cdot 2 = 2$. Эти действия записываем в таблицу, в частное — 2, и из 8 вычитаем столбиком $6 = 3 \cdot 2$, проводим горизонтальную черту, а под ней получившуюся разность, то есть 2. Сносим к полученному остатку 2 следующую цифру исходного числа. Получаем число 24, делим его на 3, в частном — 8, в остатке — 0. Записываем, как и предыдущий раз, выполненные действия.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 3 \\ \cline{2-2} 6 & 28 \\ \cline{1-1} 24 & \\ 24 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Выполнить деление $84 : 3$ по описанным правилам несложно и в уме, но с большими числами легче выполнять действия таким образом.

Пример № 38. Вычислим $342 : 6$. Записываем деление уголком.

$$\begin{array}{r|l} 342 & 6 \\ \cline{2-2} 30 & 57 \\ \cline{1-1} 42 & \\ 42 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Число 3 меньше 6, поэтому берем число образованное цифрами 3 и 4. Делим 34 с остатком на 6, получаем частное 5 и остаток 4. К числу 4 сносим цифру 2 и делим получившееся число 42 на 6. Получаем частное 7 и остаток 0.

Пример № 39. Вычислим $3502 : 17$.

$$\begin{array}{r|l} 3502 & 17 \\ \cline{2-2} 34 & 206 \\ \cline{1-1} 102 & \\ 102 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Делим с остатком 35 на 17. Получаем частное 2 и остаток 1. Сносим 0 к 1, образовавшееся число не делится на 17 (точнее, частное будет 0, а остаток 10), поэтому в частное записываем 0 и сносим к 10 цифру 2. Заканчиваем делением 102 на 17.

Пример № 40. Вычислим 53387 : 29. В этом примере получается ненулевой остаток.

```
53387 | 29
29    |1840
-----
243
232
---
 118
 116
 ---
   27
    0
   --
   27
```

Следует особо отметить, что, когда мы сносим цифру исходного числа к текущему остатку, необходимо обязательно провести деление, например, если получившееся число все еще меньше делителя, надо не забыть написать 0 в частном. Если помнить эту особенность, последнее несущественное вычитание нуля можно не писать.

Задача № 155. Делится ли одно число на другое в следующих случаях без остатка? Если нет, то какой остаток?

1) 161 : 7
2) 979 : 11
3) 1599 : 13
4) 3192 : 7
5) 2331 : 3
6) 8752 : 16
7) 137 094 : 3
8) 4 411 435 : 7
9) 543 150 : 9
10) 1738 : 11
11) 7397 : 13
12) 14 352 : 16
13) 59 313 : 17
14) 29 906 : 19
15) 81 466 : 23
16) 176 796 : 27
17) 13 572 : 29
18) 26 455 : 37

Задача № 156. Делится ли одно число на другое в следующих случаях без остатка? Если нет, то какой остаток?

1) 24 : 8
2) 124 : 6
3) 79 : 3
4) 1024 : 16
5) 763 : 17
6) 1176 : 21
7) 12 104 : 34
8) 52 684 : 32
9) 77 461 : 62
10) 109 224 : 142
11) 8 664 : 19
12) 11 835 : 15

Примечание. Ученик 8-го класса московской физико-математической школы № 2 выполнил действие 230 654 : 328 письменно на бумаге без калькулятора за 1 минуту 18 секунд.

Задача № 157. Делится ли одно число на другое в следующих случаях без остатка? Если нет, то какой остаток?

1) 124 : 4
2) 426 : 6
3) 369 : 3
4) 1024 : 24
5) 8642 : 48
6) 93612 : 3
7) 14147 : 7
8) 505010 : 10
9) 212121 : 7
10) 5789457 : 457

Дружественные числа.

Два натуральных числа m и n называются дружественными, если сумма делителей одного числа равняется другому и наоборот. Например: (220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), (10744, 10856) и другие. Обнаружено более 600 пар дружественных чисел. До сих пор не найдена формула, позволяющая получать все пары дружественных чисел. Может быть вы выведете такую формулу?!

Числовая мистика магических квадратов.

Магическим квадратом называется вид расположения чисел от 1 до n^2 в виде записи в ячейках квадратной матрицы так, что числа в каждом столбце, строке и диагоналях дают одинаковую сумму S, называемую магической суммой. Магические квадраты могут быть построены для любого натурального числа $n > 2$. Для заданного числа $n > 2$ магическая сумма определяется однозначно формулой: $S = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Таблица 3.3. Единственный магический квадрат 3×3

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Таблица 3.4. Магический квадрат 4×4

Свойства делимости.

1) Если одно число делится на второе, а второе делится на третье, то первое делится на третье, например:

$$777 : 111 = 7; \qquad 111 : 3 = 37 \quad \Rightarrow \quad 777 : 3 = 259.$$

2) Если каждое из двух чисел a и b делится на число c, то сумма $a + b$ и разность $a - b$ делится на c, например, $100 : 4 = 25$, $36 : 4 = 9$, поэтому $136 = 100 + 36$ делится на 4: $136 : 4 = 34$; $64 = 100 - 36$ делится на 4: $64 : 4 = 16$.
3) Если одно из двух чисел a и b делится на c, а другое не делится на c, то ни сумма $a+b$, ни разность $a-b$ на c не делятся, например: $100 : 4 = 25$,

а $36 : 5$ не делится, поэтому $136 = 100 + 36$ и $64 = 100 - 36$ на 5 не делятся.

Пример № 41. Пусть $a = 880$, $b = 10$, $c = 8$. Выясним, делится ли a на c. Решение: $880 : 10 = 88$, $88 : 8 = 10$. Значит 880 делится на 8.

Задача № 158. Вычислите:

1) $2296 : 56$	16) $1482 : 78$	31) $1995 : 21$	46) $1704 : 24$
2) $56 : 4$	17) $78 : 2$	32) $21 : 7$	47) $24 : 8$
3) $2296 : 4$	18) $1482 : 2$	33) $1995 : 7$	48) $1704 : 8$
4) $3783 : 39$	19) $2772 : 99$	34) $1628 : 44$	49) $1215 : 45$
5) $39 : 3$	20) $99 : 3$	35) $44 : 2$	50) $45 : 3$
6) $3783 : 3$	21) $2772 : 3$	36) $1628 : 2$	51) $1215 : 3$
7) $1827 : 63$	22) $2688 : 84$	37) $2695 : 55$	52) $5106 : 74$
8) $63 : 7$	23) $84 : 4$	38) $55 : 5$	53) $74 : 2$
9) $1827 : 7$	24) $2688 : 4$	39) $2695 : 5$	54) $5106 : 2$
10) $4992 : 96$	25) $2232 : 72$	40) $3294 : 54$	55) $3696 : 48$
11) $96 : 8$	26) $72 : 6$	41) $54 : 6$	56) $48 : 4$
12) $4992 : 8$	27) $2232 : 6$	42) $3297 : 6$	57) $3696 : 4$
13) $2775 : 75$	28) $1701 : 63$	43) $2997 : 81$	58) $3444 : 84$
14) $75 : 5$	29) $63 : 9$	44) $81 : 9$	59) $84 : 7$
15) $2775 : 5$	30) $1707 : 9$	45) $2997 : 9$	60) $3444 : 7$

Задача № 159. Вычислите:

1) $16:4$	16) $27:9$	31) $42:7$	46) $36:4$
2) $24:4$	17) $45:9$	32) $49:7$	47) $48:4$
3) $(16+24):4$	18) $(27+45):9$	33) $(42+49):7$	48) $(36+48):4$
4) $15:5$	19) $36:6$	34) $48:6$	49) $85:5$
5) $45:5$	20) $24:6$	35) $30:6$	50) $20:5$
6) $(15+45):5$	21) $(36+24):6$	36) $(48+30):6$	51) $(85+20):5$
7) $48:2$	22) $12:3$	37) $14:2$	52) $96:3$
8) $52:2$	23) $15:3$	38) $92:2$	53) $42:3$
9) $(48+52):2$	24) $(12+15):3$	39) $(14+92):2$	54) $(96+42):3$
10) $18:3$	25) $12:4$	40) $56:8$	55) $80:2$
11) $24:3$	26) $20:4$	41) $24:8$	56) $54:2$
12) $(18+24):3$	27) $(12+20):4$	42) $(56+24):8$	57) $(80+54):2$
13) $28:7$	28) $40:5$	43) $81:9$	58) $91:7$
14) $35:7$	29) $95:5$	44) $36:9$	59) $63:7$
15) $(28+35):7$	30) $(40+95):5$	45) $(81+36):9$	60) $(91+63):7$

Задача № 160. Вычислите:

1) $16:4$	16) $27:9$	31) $42:7$	46) $36:4$
2) $24:4$	17) $45:9$	32) $49:7$	47) $48:4$
3) $(24-16):4$	18) $(45-27):9$	33) $(49-42):7$	48) $(48-36):4$
4) $15:5$	19) $36:6$	34) $48:6$	49) $85:5$
5) $45:5$	20) $24:6$	35) $30:6$	50) $20:5$
6) $(45-15):5$	21) $(36-24):6$	36) $(48-30):6$	51) $(85-20):5$
7) $48:2$	22) $12:3$	37) $14:2$	52) $96:3$
8) $52:2$	23) $15:3$	38) $92:2$	53) $42:3$
9) $(48-52):2$	24) $(15-12):3$	39) $(92-14):2$	54) $(96-42):3$
10) $18:3$	25) $12:4$	40) $56:8$	55) $80:2$
11) $24:3$	26) $20:4$	41) $24:8$	56) $54:2$
12) $(24-18):3$	27) $(20-12):4$	42) $(56-24):8$	57) $(80-54):2$
13) $28:7$	28) $40:5$	43) $81:9$	58) $91:7$
14) $35:7$	29) $95:5$	44) $36:9$	59) $63:7$
15) $(35-28):7$	30) $(95-40):5$	45) $(81-36):9$	60) $(91-63):7$

Задача № 161. Вычислите:

1) $16:4$	8) $(18+25):3$	15) $12:3$	22) $(42-15):7$
2) $(16+25):4$	9) $28:7$	16) $(12+16):3$	23) $48:6$
3) $15:5$	10) $(28+36):7$	17) $12:4$	24) $(48-13):6$
4) $(15+46):5$	11) $27:9$	18) $(12+21):4$	25) $14:2$
5) $48:2$	12) $(27+46):9$	19) $40:5$	26) $(14-7):2$
6) $(48+53):2$	13) $36:6$	20) $(40+96):5$	27) $56:8$
7) $18:3$	14) $(36+25):6$	21) $42:7$	28) $(56-33):8$

29) $81 : 9$
30) $(81 - 19) : 9$
31) $36 : 4$
32) $(36 - 17) : 4$
33) $85 : 5$
34) $(85 - 21) : 5$
35) $96 : 3$
36) $(96 - 43) : 3$
37) $80 : 2$
38) $(80 - 55) : 2$
39) $91 : 7$
40) $(91 - 64) : 7$

3.4 Различные варианты представления чисел

В алфавите только единицы. Каждое число можно представить различными способами. Это необходимо научиться делать, чтобы было легче подбирать решения.

Если вам разрешено использовать только единицы и никакие другие цифры, то сколькими способами можно представить число 3, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$? Вот несколько вариантов решения:

Пример № 42.

1) $3 = 1 + 1 + 1$;
2) $3 = 1 + 1 + 1 + 1 - 1$;
3) $3 = (1 + 1) \cdot (1 + 1) - 1$;
4) $3 = ((1 + 1) \cdot (1 + 1)) - 1$;
5) $3 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1) - (1 + 1)$;
6) $3 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) : (1 + 1)$.

В алфавите только единицы и двойки. Если вам разрешено использовать только единицы и двойки и никакие другие цифры, то сколькими способами можно представить число 5, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$? Вот несколько вариантов решения:

Пример № 43.

1) $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$;
2) $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1$;
3) $5 = (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) - 1$;
4) $5 = ((1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1)) - 1$;
5) $5 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) - (1 + 1)$;
6) $5 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) : (1 + 1)$;
7) $5 = 2 + 2 + 1$;
8) $5 = 2 + 2 + 2 - 1$;
9) $5 = (2 + 1) \cdot 2 - 1$;
10) $5 = ((2 + 1) \cdot 2) - 1$;
11) $5 = (2 + 2 + 2 + 1) - 2$;
12) $5 = (2 + 2 + 2 + 2 + 2) : 2$;
13) $5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) : 2 + 1$.

Задача № 162. Напишите хотя бы одним способом числа с 1 до 15 используя только цифру 2, применяя ее только 5 раз, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Как вы понимаете, варианты представления чисел становятся более разнообразными с увеличением цифр в алфавите и самих операций. То есть вариантов представления конкретного числа с использованием фиксированного количества цифр и операций становиться больше. А если нет ограничения на количество используемых цифр, то уже имея в распоряжении только две операции сложения и вычитания, можно построить бесконечно много представлений числа.

Задача № 163. Разрешено использовать только $1, 2, 3$ и никакие другие цифры. Напишите не менее 10 способов представить число 7, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Задача № 164. Разрешено использовать только $1, 2, 3, 4$ и никакие другие цифры. Напишите не менее 10 способов представить число 9, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Задача № 165. Разрешено использовать только $0, 1, 2$ и никакие другие цифры. Напишите не менее 10 способов представить число 10, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Задача № 166. Разрешено использовать только $0, 1, 2, 3, 4, 5$ и никакие другие цифры. Напишите не менее 10 способов представить число 11, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Задача № 167. Разрешено использовать только $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и никакие другие цифры. Напишите не менее 10 способов представить число 12, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Задача № 168. Разрешено использовать только $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и никакие другие цифры. Напишите не менее 10 способов представить число 15, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Задача № 169. Разрешено использовать только $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и никакие другие цифры. Напишите не менее 10 способов представить число 18, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Задача № 170. Разрешено использовать только $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ и никакие другие цифры. Напишите не менее 10 способов представить число 20, если разрешены только четыре арифметические операции: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

3.5 Проверка арифметических операций

Проверка сложения. Чтобы убедиться, что действие выполнено верно, его надо проверить. Для проверки сложения обычно складывают слагаемые во второй раз, но в другом порядке, чем в первый. Если при втором сложении получается та же сумма, то, вероятно, что сложение произведено верно. Такой способ основан на переместительном законе сложения.

По-другому можно проверить сложение вычитанием. Для этого надо вычесть из полученной суммы одно из слагаемых. Если разность окажется равной второму слагаемому, то можно считать, что сложение выполнено верно.

Задача № 171. Выполните сложение и сделайте проверку.

1) $124 + 45$
2) $426 + 6245$
3) $369 + 3468$
4) $1024 + 24\,489$
5) $8642 + 4843$
6) $93\,612 + 3438$
7) $1417 + 9557$
8) $50\,510 + 103\,009$
9) $21\,121 + 70\,988$
10) $5787 + 45597$

Проверка вычитания. Так как уменьшаемое есть сумма вычитаемого и разности, то для проверки вычитания достаточно сложить вычитаемое с разностью. Если получится число, равное уменьшаемому, то можно считать, что действие выполнено верно

С другой стороны, так как вычитаемое и разность — слагаемые, а уменьшаемое — их сумма и так как от перестановки мест слагаемых сумма не меняется, то вычитание можно проверить вычитанием. Надо из уменьшаемого вычесть разность, и если в результате поучится вычитаемое, то действие выполнено верно.

Задача № 172. Выполните вычитание и сделайте проверку.

1) $67\,124 - 2345$
2) $58\,426 - 34\,245$
3) $70\,780 - 2335$
4) $86\,554 - 22\,121$
5) $35\,679 - 24\,574$
6) $33\,612 - 14\,381$
7) $21\,467 - 21\,466$
8) $898\,989 - 676\,767$
9) $109\,090 - 108\,080$
10) $919\,109 - 808\,099$

Проверка умножения. Так как произведение не меняется от перемены мест множителей, то для проверки умножения можно произвести действие, умножая во второй раз множители в другом порядке, чем в первый. Если результаты действий совпадают, значит, умножение выполнено верно.

Умножение можно проверить и делением. Для этого можно произведение разделить на один из сомножителей. Если в результате получается другой сомножитель, то умножение произведено правильно.

Задача № 173. Выполните умножение и сделайте проверку.

1) $67\,124 \cdot 2345$
2) $58\,426 \cdot 34\,245$
3) $70\,780 \cdot 2335$
4) $86\,554 \cdot 22\,121$
5) $35\,679 \cdot 24\,574$
6) $33\,612 \cdot 14\,381$
7) $21\,467 \cdot 21\,466$
8) $898\,989 \cdot 676\,767$
9) $109\,090 \cdot 108\,080$
10) $919\,109 \cdot 808\,099$

Проверка деления. Деление можно проверить умножением, основываясь на том, что делимое должно равняться делителю, умноженному на частное (плюс остаток, если он есть).

Если деление выполнено без остатка, то его можно проверить и делением. Так как делимое есть произведение делителя и частного, то при делении делимого на частное должен получиться делитель.

Задача № 174. Выполните деление и сделайте проверку.

1) $67\,124 : 4$
2) $58\,426 : 20$
3) $70\,780 : 2335$
4) $86\,554 : 22\,121$
5) $35\,679 : 24\,574$
6) $33\,612 : 14\,381$
7) $21\,467 : 21\,466$
8) $898\,989 : 676\,767$
9) $109\,090 : 108\,080$
10) $919\,109 : 808\,099$

3.6 Возведение натуральных чисел в степень с натуральным показателем

Мы уже знаем, что сумму нескольких одинаковых слагаемых принято записывать короче — в виде произведения: $\underbrace{5+5+5+5}_{\text{4 раза по 5}} = 4 \cdot 5$.

Произведение одинаковых чисел также записывают короче:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{4 раза по 3}} = 3^4.$$

Произведение одинаковых чисел называют *степенью*. Читают «*три в степени четыре*». При этом число 3 называют *основанием* степени, а число 4 называют *показателем* степени. Число 4 показывает, сколько раз нужно взять множителем основание степени — число 3: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

Определение 22. Вторую степень числа называют также *квадратом числа*. Запись 4^2 читают «четыре в квадрате»: $4^2 = \underbrace{4 \cdot 4}_{\text{2 раза}} = 16$.

Определение 23. Третью степень числа называют также *кубом числа*. Запись 2^3 читают «*два в кубе*»: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Определение 24. *Степенью числа* a с натуральным показателем n ($n > 1$) называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}, \quad n > 1.$$

Здесь «a» — *основание степени*, а «n» — *показатель степени*.

Принято считать, что $1^1 = 1$, $2^1 = 2$, $3^1 = 3$, $4^1 = 4$, $100^1 = 100$, т. е. первая степень любого числа равна самому числу: $a^1 = a$.

Принято считать, что $1^0 = 1$, $2^0 = 1$, $3^0 = 1$, $4^0 = 1$, т. е. нулевая степень любого ненулевого числа равна единице, или нуль в любой натуральной степени есть нуль; также принято считать, что $0^0 = 1$:

$$a^0 = 1, \quad 0^k = 0, \ k \text{ — натуральное.}$$

Задача № 175. Запишите кратко: $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Задача № 176. Вычислите: 1) $4+4+4$; 2) $8+8+8+8$; 3) $a+a+a+a+a$; 4) $x + x + x + x + x + x$.

Задача № 177. Вычислите: 1) $4 \cdot 4 \cdot 4$; 2) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$; 3) $a \cdot a \cdot a \cdot a$; 4) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ 5) $(4 + 4 + 4) \cdot x \cdot x$

Задача № 178. Вычислите: 1) $(2 \cdot 2 \cdot 2) + 1^0$; 2) $(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) - 1^1 + 5^0$; 3) $(a \cdot a \cdot a) + (a \cdot a \cdot a)$; 4) $(x \cdot x \cdot x) \cdot x$; 5) $(3 + 3 + 3) \cdot 4^1$.

Примечание. Ученик 8-го класса московской физико-математической школы № 2 выполнил действие $1\,111\,111^4$ письменно на бумаге без калькулятора за 6 минут.

3.7 Простые и составные числа

Определение 25. *Простые числа* — это числа, которые делятся без остатка только на 1 и сами на себя.

Приведем первые несколько простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,$$

$$53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 \dots$$

Определение 26. *Составное число* — это произведение двух или большего числа простых чисел.

Пример № 44. $2{\cdot}3 = 6$ — составное число; $2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}11 = 330$ — составное число.

Задача № 179. Определите, составное или простое данное число, используя признаки делимости:

1) 67	3) 56	5) 36	7) 101	9) 89
2) 38	4) 1024	6) 72	8) 111	10) 23

3.8 Множества чисел и их краткая характеристика

Прежде чем углубляться в дальнейшее изучение математики, давайте рассмотрим кратко различные множества чисел.

Особое внимание уделял проблеме числа Пифагор с его доктриной музыки сфер, где энергетические вибрации каждой звучащей планеты имели свое число. Не менее важным было в пифагорейской теории учение о тетрактисе (тетраде).

Согласно пифагорейскому определению число представляет собой множество, составленное из единиц. Именно поэтому последователи пифагореизма определяли единицу «границей между числом и частями».

Наука, изучающая сущность числа, называлась пифагорейцами *арифметикой* и считалась главной среди основных разделов, составляющих данную систему знания — геометрии (как учения о фигурах и способах их измерения), музыки (как учения о гармонии и ритме) и астрономии (как учения о строении Вселенной).

Пифагорейская теория исходит из того, что арифметика, будучи изначально первичнее других дисциплин, подразделяется на два больших направления: направление, связанное с множественностью или же составляющими частями вещи и направление, сосредоточенное на величине или же относительной величине, так называемой «плотности» вещи.

По качеству числа разделяются пифагорейской теорией на три основных категории — несовершенные, совершенные, сверхсовершенные.

Главная наука о числе, арифметика, была неразрывно связана с геометрией и потому числа, соотносящиеся с правильными геометрическими фигурами, назывались фигурными. Они подразделялись на:

— линейные числа,
— плоские числа,
— телесные числа,
— треугольные числа,
— квадратные числа,
— пятиугольные числа.

Также, числа подразделялись пифагорейцами на два вида: чётные и нечетные. Чётность и нечётность понимались как признаки, относящиеся к делимости и женскому и мужскому началу. Нечётные числа божественны, чётные числа являются земными, дьявольскими и несчастливыми. Что касается

единицы, то пифагорейцы считали её андрогинным, то есть совмещающим мужские и женские атрибуты.

До наших дней дошла таблица умножения, записанная в ионийском ключе, которая помимо своей основной функции представляла собой иллюстрацию такого свойства чисел как их пропорциональность. Пропорции подразделялись на арифметические, геометрические, гармонические (музыкальные) и непрерывные (то есть такие, у которых средние члены совпадали).

Легенда гласит, что гармонические числа, соотношение которых рождает музыку сфер, были найдены Пифагором. Так как Душу определяли по движению, то количество движения должно было служить мерою количества Души. Это количество выражается числом 114 695 при 36 тонах — гармонических ступенях Мировой Души.

Цифры — система знаков («буквы») для записи чисел («слов»). Слово «цифра» без уточнения обычно означает один из следующих десяти («алфавит») знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (т. н. «арабские цифры»). Сочетания этих цифр порождают дву-(и более)значные числа.

Существуют также много других «алфавитов»:

— римские цифры (I, V, X, L, C, D, M);
— шестнадцатеричные цифры (0, 1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F);
— цифры майя (от 0 до 19)

и другие. В некоторых языках, например, в древнегреческом, в иврите, в церковнославянском, существует система записи чисел буквами.

Система счисления — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков. Система счисления:

— даёт представления множества чисел (целых и/или вещественных);
— даёт каждому числу уникальное представление (или, по крайней мере, стандартное представление);
— отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

Системы счисления подразделяются на позиционные, непозиционные и смешанные.

Чем больше основание системы счисления, тем меньшее количество разрядов (то есть записываемых цифр) требуется при записи числа в позиционных системах счисления.

Натуральные числа — числа, возникающие естественным образом при счёте (как в смысле перечисления, так и в смысле исчисления). Отрицательные и нецелые (рациональные, вещественные, . . .) числа натуральными не являются.

Множество всех натуральных чисел принято обозначать знаком $\mathbb{N}$. Множество натуральных чисел является бесконечным, так как для любого натурального числа найдётся большее его натуральное число.

Отрицательное число — элемент множества отрицательных чисел, которое (вместе с нулём) появилось в математике при расширении множества

натуральных чисел. Цель расширения: обеспечить выполнение операции вычитания для любых чисел. В результате расширения получается множество целых чисел, состоящее из положительных (натуральных) чисел, отрицательных чисел и нуля.

Все отрицательные числа, и только они, меньше, чем ноль. На числовой оси отрицательные числа располагаются слева от нуля. Для них, как и для положительных чисел, определено отношение порядка, позволяющее сравнивать одно целое число с другим.

Множество целых чисел определяется как замыкание множества натуральных чисел относительно арифметических операций сложения (+) и вычитания (−). Таким образом, сумма, разность и произведение двух целых чисел дает снова целые числа. Оно состоит из натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5, ...), чисел вида $-n$ (отрицательных) и числа нуль. Множество всех натуральных чисел принято обозначать знаком $\mathbb{Z}$.

Необходимость рассмотрения целых чисел продиктована невозможностью (в общем случае) вычесть из одного натурального числа другое.

Отрицательные числа в Европе ввели в обиход Михаэль Штифель (1487–1567) в книге «Полная арифметика» (1544), и Николя Шюке (1445–1500).

Для каждого натурального числа n существует одно и только одно отрицательное число, обозначаемое $-n$, которое дополняет n до нуля: $n+(-n)=0$. Оба числа называются *противоположными* друг для друга. Вычитание целого числа a из другого целого числа b равносильно сложению b с противоположным для a: $b-a=b+(-a)$

Положительные целые числа. Хотя мы все усваиваем положительные целые числа (1, 2, 3 и т. д.) в раннем детстве, когда вряд ли приходит в голову задумываться об определениях. Однако любая математическая теория вынуждена начинаться с некоторых неопределяемых понятий и аксиом или постулатов относительно них. Так как положительные целые числа хорошо известны и трудно определить их с помощью чего-то более простого, мы примем их за исходные неопределяемые понятия и будем считать, что основные свойства этих чисел известны. Положительное число — любое число большее нуля. Например, +1, +12, +346. Любое число без знака рассматривается как положительное. Например, $1, 12, 8907$.

Чётное число — целое число, которое делится без остатка на 2: $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$

Нечётное число — целое число, которое не делится без остатка на 2: $\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

В соответствии с этим определением нуль является чётным числом.

Если m чётно, то оно представимо в виде $m=2k$, а если нечётно, то в виде $m=2k+1$, где $k \in \mathbb{Z}$.

С точки зрения теории сравнений, чётные и нечётные числа — это элементы соответственно классов вычетов [0] и [1] по модулю 2.

Простое число — это натуральное число, имеющее ровно два различных натуральных делителя: единицу и самого себя. Все остальные числа, кроме единицы, называются составными. Таким образом, все натуральные числа больше единицы разбиваются на простые и составные. Изучением свойств простых чисел занимается теория чисел.

Последовательность простых чисел начинается так: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, ...

Составное число — натуральное число, большее 1, не являющееся простым. Каждое составное число является произведением двух натуральных чисел, больших 1.

Последовательность составных чисел начинается так: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, ...

Основная теорема арифметики утверждает, что любое составное число может быть единственным способом разложено в произведение простых множителей с точностью до порядка их следования.

Квадратные числа — положительные числа, являющиеся результатом умножения целого числа на самого себя. Это действие называется возведением в квадрат. Например, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$, $5 \cdot 5 = 25$, ... Можно возводить в квадрат и отрицательные числа, результат будет всегда положительным числом, например, $(-2) \cdot (-2) = 4$, $(-3) \cdot (-3) = 9$, ...

3.9 Числовые выражения

Определение 27. *Числовое выражение* — выражение, сконструированное из чисел, знаков действий и скобок, определяющих порядок этих действий. При этом каждое отдельно взятое число также является числовым выражением.

Пример № 45. Примеры числовых выражений: $2+3$, $5-2$, $(1+2)\cdot 3$, 4, -8.

Определение 28. *Значение числового выражения* — число, полученное в результате последовательного выполнения действий, указанных в выражении.

Пример № 46. Пусть даны выражения $2+3$, $5-2$, $(1+2)\cdot 3$. Здесь 5, 3 и 9 — значения числовых выражений.

Определение 29. Два числовых выражения считаются равными, если их значения совпадают.

Так, выражения: 5 и $10:2$ будут равными, как и выражения $2\cdot 3$ и $(13-1):2$. Можно записать *числовые равенства* $10:2=5$ и $2\cdot 3=(13-1):2$. В такой записи одно числовое выражение стоит слева от знака равенства (=), а другое — справа.

Примечание. Всякое верное числовое равенство является *тождеством*.

Пример № 47. Примеры верных числовых равенств (тождеств): $5 = 3 + 2$; $8 = 16/2$; $1 + 1 + 2 = 4$.

Пример № 48. Примеры неверных числовых равенств: $5 = 3 + 7$; $8 = 18/2$; $1 + 2 = 4 - 3$.

3.10 Разложение натурального числа по разрядам

Пример № 49. Число 3 состоит из 3 единиц: $\overline{a_0} = 3 = 3$ единицы $= 3 \cdot 10^0$.

Число 78 состоит из 7 десятков и 8 единиц:

$$\overline{a_1 a_0} = 78 = 7 \text{ десятков} + 8 \text{ единиц} = 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Число 3278 состоит из 3 тысяч, 2 сотен, 7 десятков и 8 единиц:

$$\overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = 3278 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Число 978 321 состоит из 978 тысяч, 3 сотен, 2 десятков и 1 единицы:

$$\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = 978\,321 = 9 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

В этой записи везде присутствует умножение на 10, так как это запись числа в десятичной системе счисления. Зная, что $1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ и так далее, мы можем записать любое число как количество единиц умноженное на 10 в некоей степени.

Пример № 50. В позиционной системе счисления у числа 36 421:

1 — цифра 1-го разряда — разряда единиц,

2 — цифра 2-го разряда — разряда десятков,

4 — цифра 3-го разряда — разряда сотен,

6 — цифра 4-го разряда — разряда тысяч,

3 — цифра 5-го разряда — разряда десятков тысяч,

что можно представить в виде разложения

$$\overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = 36\,421 = 3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

Таблица 3.5. Разряды десятичной системы счисления

1	единица	10^0	$1 \cdot 1000^0$
10	десять	10^1	$10 \cdot 1000^0$
100	сто	10^2	$100 \cdot 1000^0$
1 000	тысяча	10^3	$1 \cdot 1000^1$
10 000	десять тысяч	10^4	$10 \cdot 1000^1$
100 000	сто тысяч	10^5	$100 \cdot 1000^1$
1 000 000	миллион	10^6	$1 \cdot 1000^2$
10 000 000	десять миллионов	10^7	$10 \cdot 1000^2$
100 000 000	сто миллионов	10^8	$100 \cdot 1000^2$
1 000 000 000	сто миллиардов	10^9	$1 \cdot 1000^3$
10 000 000 000	десять миллиардов	10^{10}	$10 \cdot 1000^3$
100 000 000 000	сто миллиардов	10^{11}	$100 \cdot 1000^3$

Задача № 180. Определите значность чисел и запишите их в виде разложения:

1) 0
2) 458
3) 2487
4) 130 987
5) 3 524 312
6) 856 876 879
7) 2 345 687 856
8) 100 099 882 301
9) 9 000 780 032 135

Задача № 181. Представить число в виде разложения:

1) 0
2) 1
3) 2
4) 3
5) 4
6) 10
7) 11
8) 12
9) 13
10) 14
11) 21
12) 25
13) 29
14) 30
15) 45
16) 67
17) 38
18) 94
19) 69
20) 34
21) 19
22) 100
23) 101
24) 176
25) 274
26) 375
27) 973
28) 367
29) 281
30) 205
31) 890
32) 2367
33) 8934
34) 7643
35) 9070
36) 4512
37) 8760
38) 50 150
39) 48 158
40) 80 583
41) 235 868
42) 908 967
43) 780 890
44) 123 456
45) 9 870 654
46) 87 576 502
47) 123 456 789
48) 909 807 643
49) 123 456 980
50) 903 070 507

Задача № 182. Запишите в виде числа:

1) 10^0
2) 10^1
3) 10^2
4) 10^{10}
5) 10^8
6) 10^9
7) 10^6
8) 10^4
9) 10^{11}
10) 10^3
11) 10^{20}
12) 100^0
13) 100^6
14) 100^5
15) 100^{10}
16) 100^4
17) 100^3
18) 100^2
19) 100^1
20) 100^{11}
21) 100^7
22) 100^9
23) 1000^5
24) 1000^7

Задача № 183. Представьте разложение в виде числа:

1) $1 \cdot 10^0$;
2) $0 \cdot 10^0$;
3) $2 \cdot 10^0$;
4) $4 \cdot 10^0$;
5) $7 \cdot 10^0$;
6) $6 \cdot 10^0$;
7) $0 \cdot 10^0$;
8) $9 \cdot 10^0$;
9) $8 \cdot 10^0$;
10) $3 \cdot 10^0$;
11) $5 \cdot 10^0$;
12) $0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$;
13) $1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$;
14) $3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$;
15) $2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$;
16) $5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$;
17) $3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$;
18) $6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
19) $4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$;
20) $0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;
21) $5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$;
22) $1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$;
23) $3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
24) $2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

Задача № 184. Представьте разложение в виде числа:

1) $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$;
2) $2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$;
3) $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$;
4) $3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;
5) $4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$;
6) $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
7) $6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
8) $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$;
9) $8 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$;
10) $9 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;
11) $0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$;
12) $0 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
13) $9 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
14) $8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
15) $7 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
16) $6 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
17) $5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
18) $4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
19) $3 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
20) $0 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
21) $2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
22) $1 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
23) $9 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
24) $3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
25) $6 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
26) $1 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;
27) $7 \cdot 10^8 + 6 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$.

Глава 4

Целые числа

4.1 Отрицательные числа

Представим себе термометр, который показывает 7° тепла. Если температура опустится на 3°, то термометр покажет 4° тепла. Уменьшению температуры соответствует действие с натуральными числами:$7 - 3 = 4$. Если температура опустится на 7°, то термометр покажет 0°: $7 - 7 = 0$. Если же температура опустится на 10° градусов, то термометр покажет -3° (или 3° мороза). Но результат вычитания $7 - 10$ не выражается целым неотрицательным числом, хотя запись -3° имеет определенный смысл. Он заключается в том, что термометр показывает температуру, которая на 3 деления ниже нуля.

Для того, чтобы действие $7 - 10$ (и другие подобные) было выполнимо, расширяют ряд неотрицательных чисел. Для этого запишем влево от нуля по порядку числа $1, 2, 3, \ldots$. Они будут показывать номер места, считая от нуля, на котором стоит число, или насколько данное число меньше нуля. Добавим к каждому из этих чисел знак минус($-$), который будет показывать, что число стоит слева от нуля. Эти числа читаются так: "минус один", "минус два", "минус три", и т. д.:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5, \ldots$$

То есть, если мы вычтем из меньшего числа большее, то получится число, которое называется *отрицательным*. Оно записывается со знаком «$-$» перед самим числом. Например, $3 - 4 = -1$, $0 - 1 = -1$, $6 - 10 = -4$. $-1, -4$ — отрицательные числа. Чтобы из меньшего числа вычесть большее надо вычесть из большего числа вычесть меньшее и перед разностью поставить знак «$-$».

Таким образом, если мы будем не прибавлять к нулю единицу, а вычитать, то вместо ряда натуральных (положительных) мы получим ряд отрицательных чисел, отличающиеся от натуральных только знаком.

Справа от нуля расположены натуральные числа, которые еще называют *целыми положительными* числами. Слева от нуля расположены *целые отрицательные* числа. В совокупности с нулём и натуральными, отрицательные числа образуют все *целые* числа.

Противоположные числа

Определение 30. Целые числа, которые отличаются только знаком, называются *противоположными*.

Например: 1 и -1, 7 и -7 являются противоположными. Т.е. если перед целым числом поставить знак минус, то получится число, ему противоположное: $-(+1) = -1$, $-(-4) = 4$. Единственным числом, которое не изменится, если перед ним поставить знак минус, является число нуль: $-(+0) = 0 = +0 = -0$. Нуль считается противоположным самому себе.

Число, противоположное числу a, обозначается $-a$.

Примечание. В области натуральных чисел вычитание не всегда выполнимо (из меньшего числа нельзя вычесть большее). Это обстоятельство является формальным поводом для введения в арифметику нуля и отрицательных чисел; в расширенной таким образом числовой области вычитание всегда однозначно выполнимо.

Сравнение целых чисел

Из двух целых чисел больше то, которое в ряду целых чисел стоит правее.

Пример № 51. $1 > -1,\ -2 > -6,\ 0 > -5,\ -6 < -3, -10 < 5.$

Отсюда следует, что любое положительное число больше 0, а любое отрицательное число меньше 0, и любое положительное число меньше отрицательного.

4.2 Операции с целыми числами

Арифметические действия с целыми числами основываются на операциях с натуральными. К уже известным операциям добавляется новая операция взятия модуля целого числа. В отличие от других действий, взятие модуля применяется к одному числу.

4.2.1 Модуль

Модуль числа n обозначается с помощью вертикальных черт: $|n|$.

Модулем положительного числа называется само это число:

$$|+2| = +2 = 2.$$

Модулем нуля является сам нуль:

$$|0| = 0.$$

Модулем отрицательного числа называется противоположное ему число:

$$|-5| = +5 = 5.$$

Таким образом, модуль целого числа всегда — положительное число или нуль.

Противоположные числа имеют одинаковый модуль:

$$|-5| = |+5| = 5, \quad |-x| = |+x| = x.$$

В символической форме можем теперь кратко записать вышеизложенное и некоторые свойства:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$|a| = |-a|$; $|0| = 0$: $|-5| = 5$; $|7| = 7$; $|-\frac{1}{17}| = \frac{1}{17}$;
$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; $|x| + x = 2x$, если $x > 0$ или $|x| + x = 0$, если $x \leqslant 0$;
$|x| - x = 0$, если $x > 0$ или $|x| + x = 2x$, если $x \leqslant 0$.

Примечание. С помощью модулей удобно сравнивать отрицательные числа. Так как в ряду целых чисел отрицательное число с меньшим модулем стоит левее, то из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше. Например, $|-3| < |-7|$, значит, $-3 > -7$.

4.2.2 Сложение и вычитание

Сложение. Чтобы сложить числа одинаковых знаков, надо вычислить сумму их модулей и поставить перед суммой знак слагаемых.

Чтобы сложить два числа разных знаков, надо из большего модуля вычесть меньший модуль и перед разностью поставить знак слагаемого, имеющего больший модуль.

Примечание. Можно считать, что перед натуральными числами (в противоположность минусу у отрицательных целых чисел) стоит знак «+», который при письме опускается. При сложении целых чисел с одинаковыми знаками они складываются как натуральные с сохранением знака, а при сложении чисел с разными знаками происходит вычитание как натуральных чисел.

Пример № 52. Например, $-3 + (-4) = -(|-3| + |-4|) = -(3 + 4) = -7$; $-3+8 = +(|8|-|-3|) = +(8-3) = 5$; $3+(-8) = -(|-8|-|3|) = -(8-3) = -5$.

Все законы сложения (переместительный и сочетательный) выполняются и для целых чисел.

Вычитание. Вычитание удобно рассматривать (или даже определять) как разновидность сложения — сложение положительного и отрицательного чисел. К примеру, $7 - 3 = 4$ можно рассматривать как сложение чисел 7 и -3, то есть $7 - 3$ тождественно $7 + (-3)$.

Вычесть одно число из другого то же самое, что и сложить первое число со вторым, умноженным на -1. Другими словами, разность $(a - b)$ есть сумма числа a и числа, противоположного числу b. Таким образом, чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:

$$a - b = a + (-b).$$

Таким образом, законы сложения применимы к вычитанию. Например, $2-1 = -1 + 2$, $7 + 5 - 13 = (7 + 5) - 13 = 7 + (5 - 13)$.

Пример № 53. 1) $(-3) - (-5) = (-3) + 5 = +(5 - 3) = 2$;
2) $2 - 7 = 2 + (-7) = -(7 - 2) = -5$;
3) $0 - 0 = 0 + (-0) = 0 + 0 = 0$;
4) $6 - 9 = 6 + (-9) = -(9 - 6) = -3$.

Задача № 185. Вычислите:

1) $|3| + |-4|$;
2) $|-1| + |1|$;
3) $|-5| + |-3|$;
4) $|-43| - |-5|$;
5) $|-1| - |-2| + |5|$;
6) $|-3| - |-4|$;
7) $(-3) - |3| + |-4|$;
8) $|-1| + (-5) - |1|$;
9) $+(7) - |-5| + |-3|$;
10) $|-3| - (0) + |-5|$.

4.2.3 Умножение и деление

Умножение. Умножаются целые числа так же, как и натуральные, причем если множители имели одинаковый знак, то произведение берётся со знаком «плюс», а если множители имели разные знаки — «минус». А именно:

Определение 31. Произведением двух целых чисел называется произведение их модулей, взятое со знаком плюс $(+)$, еси эти числа одинаковых знаков, и со знаком минус $(-)$, если они разных знаков.

Произведение целого числа и нуля равно нулю

Пример № 54. Например, $4 \cdot (-3) = -12$; $(-1) \cdot (-5) = 5$; $-6 \cdot 0 = 0$.

Все законы умножения (переместительный, сочетательный и распределительный) выполняются и для целых чисел.

Из распределительного(дистрибутивного) закона умножения следует:

$$(a + b) \cdot (-1) = a \cdot (-1) + b \cdot (-1).$$

А в силу переместительного закона:

$$(-1)\cdot(a+b)=(-1)\cdot a+(-1)\cdot b$$

или:

$$-(a+b)=-a-b.$$

Последнее равенство является частным случаем раскрытия скобок. Также выполнены следующие свойства целых чисел :

1) $-n=(-1)\cdot n$;
2) $(-1)\cdot(-1)=1$;
3) $-(-n)=n$;
4) $(-n)\cdot(-m)=n\cdot m$;
5) $(-n)\cdot m=-n\cdot m$
6) $n-m=n+(-m)=-m+n=-(m-n)$;
7) $(-n)+(-m)=-(n+m)$;
8) $-0=+0=0$.

Примечание. Эти равенства нетрудно вывести из общих правил и законов умножения. А последнее равенство — исключительное свойство нуля

Задача № 186. Вычислите:

1) $-|-1|-|-2|-|1|-|-6|$;
2) $-|-3|-|-1|+|6|-|-8|-|+4|$;
3) $|7|-|+1|-|3|-|-5|-|-11|$;
4) $-|-9|-|-1|-|1|-|-4|+|-1|+|0|-|-0|$;
5) $-(-0)-|-1|-|-2|+|5|-(-1)$;
6) $|-3|+(0-4)-|-4|-3\cdot(-4)$;
7) $[-|-1|\cdot(|-2|)]-|1|-|-6|$;
8) $(-4+(-2))\cdot(-|-2|+|6|-|-5|-|+4|)$;
9) $-3\cdot[|7|-|+1|-|3|]-|-5|-(3-|-11|)$;
10) $\{-|-9|-|-1|\}\cdot(-8)-[|1|-|-4|]+|-0|$.

Деление. Пусть даны два целых числа a и b. Если $|a|$ делится на $|b|$ нацело, то частное целых чисел a и b равно частному их модулей, взятому со знаком плюс $(+)$, если эти числа одинаковых знаков, и со знаком минус, если они разных знаков.

Пример № 55. $60:12=5,\ (-25):(-5)=+(25:5)=5,\ 14:(-2)=-(14:2)=-7,\ (-18):3=-(18:3)=-6.$

4.2.4 Приоритет операций

Утверждение. Приоритет операций (порядок действий) в числовых выражениях условились выполнять так: сначала производят возведение в степень, затем умножение и деление, в конце сложение и вычитание.[1] Взятие модуля выполняется тогда, когда вычислено числовое выражение под знаком модуля.

Если по условиям задачи необходимо отступить от правила приоритета операций, то употребляются скобки. Скобки показывают, что действия над числами (или выражениями), заключенными в скобки, надо произвести ранее других.

Пример № 56. Числовые выражения со скобками и без скобок:

$$2 + 3 \cdot 5 \quad \text{и} \quad (2 + 3) \cdot 5 \quad \text{означают не одно и то же.}$$

Если приходится заключать в скобки такое выражение, в котором есть уже свои скобки, то новым скобкам придают какую-нибудь другую форму. Используют круглые скобки ( ), квадратные скобки [ ], фигурные скобки { }.

Когда в выражение входят несколько пар скобок, вложенных друг в друга, то сначала выполняются операции в самых внутренних скобках.

Использование только круглых скобок допустимо, но усложняет читабельность выражений, поэтому и используют другие виды скобок. Рассмотрим пример:

Пример № 57.

$$2 \cdot \{49 - 3 \cdot [2 + 7 \cdot (3 - 1)]\}$$

Вычисляем:

1) $(3 - 1) = 2$;
2) $7 \cdot 2 = 14$;
3) $[2 + 14] = 16$;
4) $3 \cdot 16 = 48$;
5) $\{49 - 48\} = 1$;
6) $2 \cdot 1 = 2$.

Задача № 187. Найдите значение каждого выражения:

1) $1 - 5 + 3 \cdot 7$;
2) $4 - 8 \cdot 3 - 3$;
3) $6 + 8 \cdot 2 + 3$;
4) $7 - 4 \cdot 2 - 6$;
5) $8 + 3 - 9 \cdot 2$;
6) $15 - 6 \cdot 2 - 2$;
7) $4 \cdot 2 - 9 - 5$;
8) $14 - 2 \cdot 5 - 5$;
9) $40 : 2 \cdot 5 - 20$;
10) $2 \cdot 10 + 8 : 2$;
11) $45 : 15 \cdot 2 - 40$;
12) $3 \cdot 2 - 16 : 4 + 4$;
13) $50 : 10 \cdot 3 - 35$;
14) $20 + 20 : 5 + 5 - 20 - 7$;

[1] В дальнейшем вы узнаете, что перед умножением и делением будет также выполняться извлечение корня.

15) $-67 - 7 + 3 \cdot 5 : 15$;
16) $26 - 14 : 2 \cdot 2 - 6$;
17) $0 - 5 - 8 - 3 \cdot 3 - 56$;
18) $72 : 8 - 2 \cdot 3 - 3 - 4$;
19) $10 + 9 \cdot 2 + 3 \cdot 4$;
20) $13 \cdot 3 - 2 \cdot 5 - 15$;
21) $6 \cdot 5 - 8 \cdot 2 + 2 - 9 - 12 + 5$;
22) $-23 - 12 - 3 \cdot 5 - 7 - 5 - 3$;
23) $36 - 12 : 4 - 1 \cdot 1 - 8 - 2$;
24) $0 - 3 - 0 + 3 - 3 \cdot 6 - 12 - 2$;
25) $13 - 7 + 0 + 13 + 7 \cdot 2 - 1 - 4$.

4.3 Числовые выражения и скобки

Пример № 58. Примеры числовых выражений:

$$1 + 5; \quad (9 - 5) \cdot (3 + 7); \quad (2 \cdot 3) - 4; \quad (7 - 2) \cdot 0.$$

Если в числовом выражении выполнить все действия в указанном порядке, то в результате получим действительное или иное число, про которое говорят, что оно равно данному числовому выражению. Так, числовое выражение: $1 + 5$ равно 6, а выражение: $(2 \cdot 3) - 4$ равно 2 и т.д. Поэтому пишут вместо слова «равно» знак «=».

Задача № 188. Определите где числовое выражение, а где нет:
1) $1 + 5x$; 2) $3c + 5b$; 3) $(6 \cdot 5) - 5$.

Утверждение. Скобки в числовых выражениях задают порядок действий.

Сравните порядок выполнения действий в примерах и результат вычислений числовых выражений:

Пример № 59. Пример числовых выражений со скобками и без скобок:

$$1 + 5 \cdot 3 = 16; \quad (1 + 5) \cdot 3 = 18.$$

Вынесение общего множителя за скобки

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$
$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$$

Вынесением общего множителя за скобки основывается на дистрибутивном законе и позволяет упрощать выражения. Например: $75 \cdot 63 + 75 \cdot 37 = 75 \cdot (63 + 37) = 75 \cdot 100 = 750$

Задача № 189. Используя распределительный закон, вынесите множитель за скобки:

1) $3 \cdot 4 + 3 \cdot 7$
2) $11 \cdot 5 + 11 \cdot 8$
3) $9 \cdot 2 + 3 \cdot 9$
4) $13 \cdot 4 + 11 \cdot 13$
5) $11 \cdot 5 + 11 \cdot 8 + 11 \cdot 2 + 11 \cdot 7$
6) $7 \cdot 3 - 7 \cdot 3 + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 7$
7) $11 \cdot 8 - 11 \cdot 8 + 8 \cdot 11 - 8 \cdot 11$
8) $18 \cdot 16 - 9 \cdot 3 + 36 \cdot 2 - 3 \cdot 9$
9) $22 \cdot 6 - 44 \cdot 3 + 3 \cdot 22 - 44 \cdot 6$
10) $26 \cdot 7 - 13 \cdot 14 + 26 \cdot 7 - 14 \cdot 13$

4.3.1 Смена знаков перед членами в скобках

Если перед выражением в скобках стоит знак минус, то все знаки перед каждым членом внутри скобок меняются на противоположные, например:

Пример № 60.
1) $-(a) = -a$; — один член в скобках (одночлен)
2) $-(a - b) = -a + b$; — два члена в скобках
3) $-(a + b - c) = -a - b + c$; — три члена в скобках
4) $-(-a - b + c) = a + b - c$; — три члена в скобках
5) $-(3) = -3$; — один член в скобках (одночлен)
6) $-(-3 - 7) - (-5 + 8) = 3 + 7 + 5 - 8 = 7$
7) $-(2x - 7y) = -2x + 7y$; — два члена в скобках
8) $-(2x + 7y - 3z) = -2x - 7y + 3z$; — три члена в скобках
9) $-(-2x - 7y + 3z) = 2x + 7y - 3z$; — три члена в скобках

Задача № 190. Раскройте скобки:
1) $-(-6)$;
2) $-(3)$;
3) $+(-4)$;
4) $-(-3)$;
5) $+(-8)$;
6) $+(6)$;
7) $-(-9)$;
8) $-(8 - 0)$;
9) $+(-22 + 7)$;
10) $-(5 - 7)$;
11) $-(-6 - 7)$;
12) $-(3 - 4)$;
13) $+(-4 + 5)$;
14) $-(-10 - 5)$;
15) $-(-3 - 9)$;
16) $+(-8 + 1)$;
17) $+(6 + 0)$;
18) $-(-9 - 4)$;
19) $-(8 - 0 - 6)$;
20) $+(-22 + 7 - 5)$;
21) $-(5 - 7 + 3)$.

Задача № 191. Раскройте скобки:
1) $-(-6 - 5 + 4)$;
2) $-(3 - 6 + 3)$;
3) $+(-4 + 5 - 2)$;
4) $-(-3 - 9 + 0)$;
5) $+(-8 - 4 + 1)$;
6) $+(-6 - 7 + 3)$;
7) $-(-9 - 0 + 8)$;
8) $-(8 - 0 - 34)$;
9) $+(-22 + 7 + 23)$;
10) $-(5 - 7 - 7)$;
11) $-(-6 - 7 + 12)$;
12) $-(3 - 4 - 21)$;
13) $+(-7 - 14 + 1)$;
14) $+(-4 + 5 - 13)$;
15) $-(-3 - 9 + 17)$;
16) $+(-8 + 1 - 9)$;
17) $+(6 + 0 - 6)$;
18) $-(-9 - 4 + 13)$;
19) $-(8 - 0 - 12)$;
20) $+(-34 + 7 + 35)$;
21) $-(5 + 7 + 13)$.

Задача № 192. Вычислите:
1) $(-6 + 1) - (-8 - 2) + 4 - (-6 - 3) - 7 + 3$
2) $3 - 9 - (-4) - (-20 + 9) - 11 + 4 - 2$

3) $0 - 0 - 5 - 7 + (-4 + 9) - 5 - 2 + 7 - 9$
4) $(-3 + 8) - (-11 - 6) - 23 - 11 - (-5 - 4) + 8$
5) $1 + (-8 - 1) - (-7 + 1) - 0 - (-5 - 3) - 5 - 6 + (-3 - 2)$
6) $5 + (-6 - 3) - (-8 - 5) + 0 - (-3 - 7) - 5 - 9 + (-1 + 5)$
7) $3 - 9 - 6 - 14 + 5 - (-7 - 7 - 10) - 6 - 3 + 9 - 23 + 21$
8) $8 - 0 - 4 + 0 - 5 - 6 + (-4 + 6 - 3) - 12 - 6 + 2 - 33 + 30$
9) $11 + (-22) - (-11 - 5) - (-7 - 8) + 22 - 0 - 3 + (-1 - 6)$
10) $13 - 5 + (-7 + 9) - (-1 + 6) + 0 - (-2 + 5) + 0 - 1 - 2 + (-3 + 7)$

4.3.2 Раскрытие скобок

Раскрытие скобок осуществляется при помощи законов умножения и сложения: асоциативного, который позволяет опускать скобки в выражениях, использующих только сложение или только умножение, дистрибутивного, который позволяет опускать скобки в выражении, заменяя его на эквивалентное выражение.

Пример № 61. Раскроем скобки: $2 \cdot (2 - 3)$. Вычисляем: пользуемся дистрибутивным законом: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
1) $2 \cdot 2 - 2 \cdot 3$
2) $4 - 6 = -2$

Пример № 62. $2 \cdot (2 - 3 - 1)$. Вычисляем: здесь пользуемся тоже дистрибутивным законом, но уже в более сложном виде: $a \cdot (b + c + d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d$.
1) $2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1$
2) $4 - 6 - 2 = -4$

Пример № 63. $2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 1)$. Вычисляем: здесь пользуемся ассоциативным законом: $a \cdot (b \cdot c \cdot d) = a \cdot b \cdot c \cdot d$
1) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$
2) 12

Задача № 193. Вычислите:
1) $(-1) \cdot 5$;
2) $(-1) \cdot 12$;
3) $8 \cdot (-1)$;
4) $(12 + 6) \cdot (-1)$;
5) $(2 \cdot 3) \cdot (-1)$;
6) $(-1) \cdot (-1)$;
7) $(-1) \cdot (1)$;
8) $(-1) \cdot (-7)$;
9) $(-11 + 4) \cdot (-1)$;
10) $(-5 \cdot 2) \cdot (-1)$.

Задача № 194. Вычислите:
1) $-(-4)$;
2) $-(-1) \cdot 5$;
3) $-5 \cdot (-3)$;
4) $-(2 + 3) \cdot (-7)$;
5) $-(7 \cdot 4) \cdot (-1)$;
6) $(-5) \cdot (-7)$;

7) $(-4)\cdot(-1-8)$;
8) $(-2)\cdot(-6+3)$;
9) $-(-11+14)\cdot(-9)$;
10) $-[(-2\cdot 5)\cdot(-8)]$.

Задача № 195. Вычислите:

1) $(-4\cdot 6)$;
2) $-[(-1)\cdot(-4)]$;
3) $-[-5\cdot(-3+5)]$;
4) $-[-(2-5)\cdot[-(6-3)]]$;
5) $-[-(2\cdot(3-5))\cdot[-(-1-8)]]$;
6) $-[(-5)\cdot(-7)]+(-15)$;
7) $[(-4)+6\cdot[-(-7-4)]$;
8) $(-2)\cdot(-6+3)\cdot(-4-9)$;
9) $-(-11+14)\cdot(-9)\cdot(6-11)$;
10) $[(-4\cdot(5-6))\cdot(23-8)]$;
11) $(-3)+(-7)$;
12) $-[(-5)+(-9)]$

Задача № 196. Найдите значение каждого выражения:

1) $-(1-5+3)\cdot 7$;
2) $6+8\cdot(2+3)$;
3) $-(10+9)\cdot 2+3\cdot 4$;
4) $15-6\cdot(2-2)$;
5) $(14-2)\cdot(-(-5-8))$;
6) $6\cdot 5-8\cdot 2+2$;
7) $2\cdot(11+8:2):5$;
8) $3\cdot(2-16:4)+4$;
9) $20+20:(5+5)-20$;
10) $26-14:2\cdot 2$;
11) $72:(8-2\cdot 3)-3$;
12) $36-12:(4-1)\cdot 1$;
13) $6-4\cdot 5-(23-6+5)\cdot 3$;
14) $67-61+220:((-2)-11+123)$;
15) $-(12+24)\cdot 3+36\cdot 2-36$;
16) $150:3-50\cdot(-2)\cdot(2-2)-2$;
17) $25\cdot 3-75-(12-2)\cdot 2-20$;
18) $60\cdot 2-120\cdot 1+0-67$;
19) $0-(-2\cdot(12+6:2)):1-4$;
20) $4:4-3\cdot(-3+6)-9+3\cdot(7-14:2)-5-0$;
21) $0+22+22-44:(2+2)-22-0-11\cdot 2$;
22) $22-14:2\cdot 2-67-63+80:(-2)-11$;
23) $42:[-(8-2\cdot 2)-5\cdot(2-6:2)]:2-4-3$;
24) $36-15:[-(7-5)-3]\cdot(45-16:4)+3\cdot 4$;
25) $36:12-2\cdot[-(-2-7)]-14+2\cdot 7-(27-8+9)\cdot 2-13-0$.

4.4 Числовые равенства

Всегда, когда мы производим какие-либо действия с числовыми выражениями, мы получаем цепочку числовых равенств.

Определение 32. Числовое равенство — это равенство двух числовых выражений, записанное при помощи знака равно (=).

Пример № 64. Вычислим выражение $4 \cdot (3 - 10) + 23$. Сначала выполняем вычитание и получаем первое числовое равенство: $4 \cdot (3 - 10) + 23 = 4 \cdot (-7) + 23$. Затем выполняем умножение и в конце сложение. Получаем еще два числовых равенства: $4 \cdot (-7) + 23 = -28 + 23$, $-28 + 23 = -5$.

4.4.1 Свойства числовых равенств

Определение 33. Если выполнить некую допустимую операцию над левым числовым выражением в равенстве и точно такую же операцию с правым числовым выражением равенства, то получим равные числовые выражения.

Пример № 65. Умножим левую и правую часть числового выражения $2 + 3 = 5$ на число 7. Поскольку необходимо умножить на 7 всю левую часть выражения, а не какую-то его часть, то вся левая часть берётся в скобки.

$$2 + 3 = 5 \Rightarrow 7 \cdot (2 + 3) = 7 \cdot 5$$

Если какое-либо слагаемое перенести из одной части верного равенства в другую, поменяв при этом его знак на противоположный, то снова получим верное равенство.

Пример № 66.
$5 + 5 = 3 + 7 \Leftrightarrow 5 = 3 + 7 - 5$, $-2 = 2 - 4 \Leftrightarrow -2 + 4 = 2$, $34 - 12 = 3 - (-19) \Leftrightarrow 34 = 3 - (-19) + 12$.

Допустимые операции над числовыми равенствами

1) Сложение
2) Вычитание
3) Умножение
4) Деление
5) Возведение в натуральную степень
6) Взятие модуля

Пример № 67. Выполним допустимые операции над левой и правой частью числового выражения $5 + 1 = 6$:

1) Сложение: $3 + 5 + 1 = 3 + 6$

2) Вычитание: $5 + 1 - 3 = 6 - 3$
3) Умножение: $2 \cdot (5 + 1) = 2 \cdot 6$
4) Деление: $(5 + 1) : 2 = 6 : 2$
5) Возведение в натуральную степень: $(5 + 1)^2 = 6^2$
6) Взятие модуля: $|5 + 1| = |6|$

Примечание. Допустимые операции с числовыми равенствами нужны для решения уравнений, о которых будет рассказано позже

Задача № 197. Выполните допустимые операции над левой и правой частью числового равенства:
1) $6 + 8 = 14$
2) $3 \cdot 4 = 12$
3) $4 + 5 + 7 = 17 - 1$
4) $(2 \cdot 5) - 4 = 12 : 2$
5) $4 + 9 + 6 = 15 + 4$
6) $2 \cdot 3 = 6$
7) $1 + 2 + 3 = 8 - 1$
8) $30 - (4 \cdot 5) - 2 = 16 : 2$

4.4.2 Буквенные выражения

Определение 34. Если в числовом выражении (равенстве) некоторые (или все) входящие в него числа заменить буквами, то получится *буквенное (алгебраическое) выражение.*

В зависимости от состава операций, указанных в алгебраических выражениях, определяются различные типы (или виды) этих выражений. Если в последовательности символов, кроме знаков математических операций, используются также знаки $=$, $>$, $<$, $\geqslant, \leqslant, \neq$, то такая последовательность называется равенством, или неравенством.

Пример № 68.

Числовое выражение $(2 + 3) \cdot 5 \longrightarrow$ буквенное выражение $(a + b) \cdot 5$.

Буквенные обозначения употребляют, если желают выразить, что некоторое свойство принадлежит не каким-нибудь отдельным числам, а разным числам. Т.е. буквой принято обозначать переменную, значением которой может быть любое число.

Условились раз навсегда, что если между двумя буквами, написанными рядом в выражении не стоит никакого знака, то это значит, что между ними подразумевается знак умножения: $a \cdot b = ab = a \times b$

Переменные и постоянные величины

Определение 35. Постоянные величины — величины, которые в изучаемом вопросе сохраняют одно и то же значение.

Определение 36. Переменные величины — величины, которые в изучаемом вопросе принимают различные значения.

Различие между переменной и постоянной величинами относительно: величина, постоянная в некотором вопросе, может быть переменной в другом.

Часть III

Алгебра

Глава 5

Уравнение

Пример № 69. Рассмотрим равенство: $2 + 3 = 5$ В нем слева есть два числа 2 и 3, а справа от знака равенства — 5. Все они числа — неизменяемые постоянные величины.

Если теперь одно из чисел слева или справа от знака равенства заменить на некую букву (переменную), то получим *уравнение* относительно этой переменной, которая также называется неизвестной. Значит, если в равенстве представлены неизвестные величины, то такое равенство называется *уравнением*.

Пример № 70. Рассмотрим равенство: $2+3=5$. В нем слева есть два числа 2 и 3, а справа от знака равенства — 5. Все они числа — неизменяемые постоянные величины. Теперь заменим число 5 на переменную, обозначив её x. Получим уравнение: $2 + 3 = x$. Это уравнение относительно переменной x.

Определение 37. *Решить уравнение* с одной переменной — значит найти все такие числа, при подстановке которых в уравнение, получается верное равенство (тождество), или показать, что таких чисел нет. Значения неизвестных, при подстановке которых получается верное равенство, называются *корнями уравнения*.

Пример № 71. Рассмотрим уравнение: $2+3=x$. При каких значениях x мы справа от знака равенства получим величину равную левой части равенства, т. е. когда $2 + 3 = 5$ будет равно 5? Конечно, если $x = 5$.

Определение 38. Множество значений переменных, при которых выражение имеет смысл, называется *областью определения* этого выражения. Также это множество называется *областью допустимых значений переменных*.

Например, в выражение $2+3=x$ вместо x можно подставить любое натуральное число. При подстановке числа 5 вместо x выражение будет являться верным равенством, а если в него подставить любое другое число, выражение будет неверным. То есть выражение $2 + 3 = x$ определено для всех натуральных чисел.

Для нахождения корней уравнения необходимо перенести все числа вправо от знака «=», а слева оставить неизвестную переменную. Но можно сделать и наоборот.

Хотя и говорится перенести все числа вправо от знака «=», на самом деле это означает вычесть или прибавить число одновременно к левой и правой

частям равенства, либо умножить или разделить одновременно обе части равенства на ненулевое число. При перенесении всех чисел и переменных в одну часть равенства с другой стороны остаётся 0. Например:

$$2+3=x \Leftrightarrow 2+3-x=0 \Leftrightarrow 5-x=0$$

Определение 39. Два выражения с одними и теми же переменными и общей областью определения называются *тождественно равными*, если при любых значениях переменных их соответствующие значения равны.

Пример № 72. Тождественно равными будут следующие пары выражений:
1) $x+2$ и $2+x$;
2) $(2\cdot 3+4)\cdot x$ и $(11-1)\cdot x$;
3) $2+3-x=0$ и $5-x=0$.

Определение 40. Переход от одного выражения к другому, тождественно равному ему на данном множестве значений переменных, называется *тождественным преобразованием* выражения.

Пример № 73. Рассмотрим уравнение: $2+8=x-4$. Здесь x — неизвестная переменная, значение которой необходимо найти. Перенесем числа 2 и 8 в правую часть уравнения, поменяв знаки при переносе на противоположные. То есть из левой и правой частей равенства вычтем числа 2 и 8. Получим: $0=x-4-2-8$. Переменную x перенесем влево, поменяв знак: $-x=4-2-8$, то есть вычтем x из обеих частей равенства. Слева осталась неизвестная x, а справа несколько чисел и знаков. Теперь вычислим правую часть: $-x=-6$. Мы имеем право сменить знаки на противоположные сразу слева и справа от знака «=»: $x=6$. На самом деле мы умножаем выражения слева и справа от «=» на -1. Мы получили, что число 6 является корнем исходного уравнения, т. е. мы решили уравнение.

5.1 Одночлен

Определение 41. *Одночлен* — выражение, представляющее собой произведение констант (чисел) и переменных в натуральной степени.

Пример № 74. Одночлены:

1) 2	3) $-x$	5) $3tk^3$	7) $-2xa^6 7b^2 z^8$
2) -4	4) $2x$	6) $-3x7y4z^3$	

где, в 3) (-1) — коэффициент одночлена $-x$; в 4) 2 — коэффициент одночлена $2x$.

Определение 42. *Стандартный вид одночлена* — выражение, представляющее собой произведение всех констант (чисел), записанных перед переменными (коэффициент одночлена), а переменные представлены в виде натуральных степеней этой переменной.

Определение 43. Одночлены называются *подобными*, если имеют одинаковые буквенные множители (имена переменных) с учетом их степеней, например: $6xy$ и yx, a^2b^3 и $-7ab^3a$ — подобные одночлены.

Определение 44. Если мы имеем выражение, состоящее из суммы одночленов, в котором имеются подобные одночлены, то сложение подобных одночленов называется *приведением подобных слагаемых*.

Пример № 75. $2x + 4y - 3x + y = 2x - 3x + 4y + y = -x + 5y = 5y - x$.

Умножение одночлена на одночлен. Для умножение одночлена на одночлен необходимо перемножить постоянные коэффициенты и переменные с одинаковыми именами, например: а) $2a \cdot 3a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 6a^2$; б) $(-4) \cdot x^2 \cdot 2 \cdot y \cdot x = -8x^3y$.

Определение 45. *Степенью одночлена* называется сумма показателей степеней входящих в него переменных.

Выражение $9x^3y$ является одночленом стандартного вида, коэффициент которого равен 9, а степень равна 4, поскольку степень x равна 3, а степень y равна 1 $(3 + 1 = 4)$.

Пример № 76. В одночлене $2x$ степень равна 1, коэффициент равен 2.
В одночлене $3xy^2$ степень равна 3, коэффициент равен 3.
В одночлене $6axy^3z^4$ степень равна 9, коэффициент равен 6.

При произведении одночленов (переменных с одинаковыми именами) их степени складываются, например: $x \cdot x^2 = x^{1+2} = x^3$; $a^3 \cdot a^4 = x^{3+4} = a^7$. При этом их постоянные коэффициенты перемножаются: $2x \cdot 4x^2 = 2 \cdot 4 \cdot x^{1+2} = 8x^3$.

Задача № 198. Выполните действия.

1) $y \cdot 4$;	5) $6y \cdot 3y$;	9) $x \cdot x^2$;	13) $4xy \cdot x^2$;
2) $y \cdot y$;	6) $7y \cdot 3$;	10) $2x \cdot 3x^2$;	14) $2xy \cdot 3x^2y$;
3) $2y \cdot y$;	7) $9y \cdot y$;	11) $5x \cdot 2x^2$;	15) $5yx \cdot yx^2$;
4) $2y \cdot 4y$;	8) $3x \cdot 5x$;	12) $7x^2 \cdot 4x$;	16) $yx^2 \cdot 4xy^2$.

5.2 Приведение подобных членов.

Для приведения подобных членов необходимо найти одночлены с одинаковыми буквенными значениями (именами переменной) стоящими в одинаковых степенях. (Сами обозначения переменных могут быть любыми буквами

латинского алфавита.) После этого можно сложить коэффициенты стоящие перед именами переменных.

Пример № 77. Рассмотрим выражение: $2x + 8x - x - 4$. Здесь несколько одночленов с переменной x. Сложим все одночлены, у которых есть x: $9x - 4$. Это и есть искомый результат.

Задача № 199. Приведите подобные члены:

1) $-6x + 2x$;
2) $3x - 4x$;
3) $-2y - 7y$;
4) $12y + 24y$;
5) $-54x + 70x$;
6) $-25x - 50x$;
7) $-5w - 13w$;
8) $-4k - 124k$;
9) $-3u - 7u$;
10) $17c - 5c$;
11) $-2m + m + 3m$;
12) $-8m - m - 4m$;
13) $-1z + z - 8z$;
14) $3z - z + 2z$;
15) $-7y - 6y - y$.

Задача № 200. Приведите подобные члены:

1) $7x + 3x$;
2) $2x - 6x$;
3) $7y - 2y$;
4) $9y + y$;
5) $x + 7x$;
6) $-8x - 5x$;
7) $-w - 3w$;
8) $4k - k$;
9) $78u - 67u$;
10) $10c - c$;
11) $m + 5m + 7m$;
12) $-m - 5m + 9m$;
13) $-z + 5z - 7z$;
14) $z - 7z + 12z$;
15) $5y - 4y - 13y$.

Задача № 201. Приведите подобные члены:

1) $6x - 9 - 7x + 3x$;
2) $2x - 56 - 6x + 45$;
3) $12 - 7y - 2y + 5 - 4y$;
4) $10 - 9 - 3y + 9y + y + 3$;
5) $23x - x + 7x - 42$;
6) $43 - 8x - 90 - 5x + 45$;
7) $3 - w - 6w + 3w - w$;
8) $4k - k + k - 4k + 7k$;
9) $10c - c + c - 10c + 1$;
10) $-m + 5m + 7m + m + 4$;
11) $1 - m - 5m + 9m + m + 9$;
12) $23 - z + 5z - 5 + z - 7z$;
13) $z - 7 - 7z + 12 + 12z - z$;
14) $-78u - 67u + 78u + 68u - 1$;
15) $15y - 5y - 4y - 13y + 15$;
16) $0 - 123x - 123 + 123 - 3x + 0$;
17) $34y - 17y - 7y - 19y + 34 - 15$;
18) $30 - 12x - 13 + 12 - 13x + 6x - 0$.

Задача № 202. Приведите подобные члены:

1) $3y - 6x - 9 - 7y - 7x + 3x - y + 4$;
2) $y - 2x - 56 - 6y - 6x + 45 + 7 - 1$;
3) $2x - 7x - 2y + 5 - 4y - x - 0x - 0$;
4) $r - 3x - x + 4r - 7x - 42 - 9 - 0$;
5) $-z - 4z - 8x - 9z - 5x + 5 - z + 7$;
6) $k + 90k - 3 - w - 6w + 3w - 89k - 8$;
7) $12u - 4k - k + 7u - k - 4k + 9 - 9 + 0$;
8) $y - 7u - 7u + 12u - 8u + 6u - 1 - 7y$;
9) $10c - x + b - 10c + 1x - 6b - 23 - 21$;
10) $3k - 2z - k + 5z - 5k + z - 7z - 11 - 56$;
11) $u + z - 7u - 7z + 12u + 12z - z - 5u - 35$;

12) $c - 8y - 15y - 5c - 4y - 13c + 15 - 0 - 56$;
13) $0y - 10 - 9 + 0 - 3y + y - 0y - 9y + y + 3 - 0$;
14) $y + u - m + 5m + 7m + m + 4 - u - 4y + 5u + 6y$;
15) $n - 1 - m - 1 + y - 5n + 9m + m + 9 - n - y - 0$;
16) $0 - 23x - 13y + 12 - 12x + 0 - 0 - y + 4x - 0$.

Задача № 203. Раскройте скобки и приведите подобные члены:

1) $2x - (-6x)$;
2) $5y - (3y)$;
3) $-7r + (-4r)$;
4) $r - (-3r)$;
5) $z + (-8z)$;
6) $x + (6x)$;
7) $x - (-9x)$;
8) $-y - (8y - 0)$;
9) $y + (-22y + 7y)$;
10) $z - (5z - 7z)$;
11) $x - (-6x - 7x)$;
12) $v - (3v - 4)$;
13) $3 + (-4v + 5)$;
14) $x - (-3x - 9)$;
15) $x + (-8 + 1x - 9)$;
16) $y + (6y + 0 - 8y)$;
17) $-y - (-9y - 4 + 3y)$;
18) $-y - (8y - 0 - 6y)$;
19) $y + (-22y + 7 - 5)$;
20) $-(5y - 7 + 3y) + 8$.

Задача № 204. Раскройте скобки и приведите подобные члены:

1) $-3x - (-6 - 5x + 4)$;
2) $x - (3 - 6x + 3)$;
3) $+x - (-4x + 5 - 2x)$;
4) $-y - (-3y - 9 + 0y)$;
5) $z + 3z - (-8 - 4z + 1)$;
6) $+(-6 - 7y + 3)$;
7) $-(-9 - 0 + 8)$;
8) $-(8y - 0 - 34y)$;
9) $+(-22 + 7 + 23)$;
10) $-(5y - 7 - 7y)$;
11) $-(-6 - 7 + 12)$;
12) $-(3 - 4y - 21)$;
13) $+(-4c + 5 - 13c)$;
14) $c - (-3c - 9 + 17c)$;
15) $x + (-8y + 1x - 9y)$;
16) $x + (6x + 0v - 6v)$;
17) $v - (-9v - 4t + 13t)$;
18) $t - (8n - 0 - 12n)$;
19) $n + (-34n + 7 + 35)$;
20) $y - (5 + 7y + 13y)$.

Задача № 205. Приведите подобные члены и вычислите:

1) $(-6c + 1) - (-8c - 2c) + 4c - (-6c - 3) - 7c + 3$
2) $3y - 9 - (-4y) - (-20 + 9y) - 11y + 4 - 2y$
3) $0y - 0 - 5 - 7y + (-4 + 9) - 5y - 2 + 7 - 9$
4) $(-3k + 8k) - (-11k - 6) - 23k - 11 - (-5k - 4) + 8k$
5) $1y + (-8y - 1) - (-7y + 1) - 0 - (-5y - 3) - 5 - 6y + (-3 - 2)$
6) $5x + (-6x - 3) - (-8x - 5) + 0 - (-3x - 7) - 5 - 9x + (-1 + 5x)$
7) $3y - 9z - 6y - 14z + 5y - (-7y - 7z - 10) - 6 - 3 + 9z - 23y + 21$
8) $8n - 0k - 4n + 0k - 5u - 6k + (-4n + 6 - 3) - 12n - 6k + 2 - 33u + 30$
9) $11 + (-22u) - (-11 - 5) - (-7u - 8) + 22 - 0 - 3u + (-1 - 6)$
10) $13t - 5 + (-7u + 9t) - (-1u + 6) + 0 - (-2t + 5u) + 0 - 1u - 2 + (-3t + 7u)$

5.3 Многочлен

Определение 46. *Многочлен* — алгебраическая сумма одночленов. Т. е. многочлен составлен из одночленов, например: $2x + 3y^2$ и $(-2a^5 - 7b)$ — многочлены.

Определение 47. Чтобы привести многочлен *к стандартному виду* необходимо записать каждый его член в стандартном виде и привести подобные слагаемые.

Пример № 78. Приведём многочлен $2x + y + 4y - 5$ к стандартному виду. В многочлене $2x + y + 4y - 5 - x$ приведем подобные слагаемые. Получим $2x+y+4y-5-x = x+5y-5$, где $x+5y-5$ — многочлен стандартного вида.

Определение 48. *Степенью многочлена стандартного вида* называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов.

Пример № 79. Степень многочлена $2x + 3$ равна 1.
Степень многочлена $4x^2 + 1$ равна 2.
Степень многочлена $2a^2 + 4v^7 - 3$ равна 7.
Степень многочлена $7x^2 + 9x^3y^6$ равна 9, т.к. $3 + 6 = 9$.

Умножение одночлена на многочлен. Для умножения одночлена на многочлен необходимо умножить одночлен на каждый член многочлена, при этом перемножить постоянные коэффициенты каждой пары одночленов, и учесть степень переменных, например:

$$2a \cdot (3a + 1) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot 1 = 6a^2 + 2a.$$

Задача № 206. Выполните действия.

1) $-y \cdot (1 + a)$;
2) $2y \cdot (2a + 3y)$;
3) $-3y \cdot (2 - 3y)$;
4) $-3y \cdot (2y + 9)$;
5) $3y \cdot (4y - 8)$;
6) $4y \cdot (3y + 12)$;
7) $6y \cdot (4 - 7y)$;
8) $-12z \cdot (10 - 10z)$;
9) $(x^2 - 2) \cdot (-2x)$;
10) $3x \cdot (2x^2 + 3)$;
11) $4x \cdot (3x^2 - 3x)$;
12) $5x^2 \cdot (5x - 5x^2)$;
13) $2xy \cdot (3x^2 + 2x^1)$;
14) $(2x^2y - 3xy) \cdot 2xy$;
15) $(2yx^2 + 2yx^2) \cdot (-3yx)$;
16) $(3xy^2 - 8 - xz) \cdot 2yx^2$;
17) $(5a^2b - 3ba) \cdot 2ab$;
18) $(3a^4b^2 - 2ba^2) \cdot (-4a^3b)$;
19) $(2a^2b^3 - 4b^2a) \cdot 7a^3b^2$;
20) $(4a^15b^2 - 4ba^5) \cdot 5a^2b$.

Задача № 207. Выполните действия.

1) $y \cdot (4 + a)$;
2) $y \cdot (a + y)$;
3) $2y \cdot (1 - y)$;
4) $-2y \cdot (4y + 5)$;
5) $6y \cdot (3y - 3)$;
6) $7y \cdot (2y + 5)$;
7) $9y \cdot (3 - y)$;
8) $-3z \cdot (10 - z)$;
9) $(x^2 - 1) \cdot (-x)$;
10) $2x \cdot (3x^2 + 5)$;
11) $5x \cdot (2x^2 - x)$;
12) $7x^2 \cdot (4x - x^2)$;
13) $4xy \cdot (x^2 + x^1)$;
14) $(3x^2y - 4xy) \cdot 2xy$;
15) $(yx^2 + 3yx^2) \cdot (-5yx)$;
16) $(4xy^2 - 1 - xz) \cdot yx^2$;
17) $(4a^3b - 2ba) \cdot 3ab$;
18) $(2a^6b^3 - 3ba^2) \cdot (-4a^4b)$;
19) $(5a^2b^4 - 4b^5a) \cdot 10ab^2$;
20) $(5a^3b^2 - 20ba^4) \cdot 5a^3b$.

Задача № 208. Приведите подобные члены, не забывая, что знак умножения между переменной и числом можно не ставить:

1) $3y - (6x : 3x - 9x) - 7y - 7x \cdot (3x - y) \cdot 4$;
2) $y - 2x + 6 - 6y - 6x - 4 \cdot 5 - 7 \cdot 7 - 1$;
3) $2x - 7x - 2 \cdot (5y - 4y) - x - 0x - 0 - y$;
4) $r - 3x - x - 4 \cdot 6r - 4r - 7x - 42 - 9 - 0$;
5) $-z - 4z - 8x - 9z - 5 \cdot 5x - z \cdot 7 - 5$;
6) $k \cdot 90k - 3 - w - 6w \cdot 3w - 89k - 8$;
7) $12u - (4k - k) \cdot 7 - u - k - 4 \cdot 9k - 9 \cdot 1 - 0$;
8) $y - (7u - 7 \cdot 2u - 8u) \cdot 6 - u - 1 - 7y + 6u$;
9) $10c - (x \cdot 3 - b) - b - 10c \cdot 1 - (x - 6b - 23 - 21) - 5$;
10) $3k - 2z - (k \cdot 5z - 2 \cdot 3) \cdot k - z - 7z - 11 - 56$;
11) $u \cdot z - 7u - 7z \cdot 12(2 \cdot 3z - z - 5u) - 35$;
12) $c - 8y - 15y - 5c - 4y - 13c \cdot 15 - 0 - 56 - 5y - y + 3c$;
13) $0y - 10 - 9 \cdot 0 - 3 \cdot y - (0y - 9 \cdot y) \cdot 3 - 5$;
14) $1 + 5 - 0 - 3x - 13y \cdot 12 - 12x \cdot 0 - 0 - y \cdot 4 - 0 - x$;
15) $(n - 1 - m - 4 \cdot 1n) \cdot y - 5n \cdot (-6 - 9m \cdot 4) \cdot 9 - n - y - 0$;
16) $y - 5 \cdot u - m \cdot (5 + m \cdot 7) \cdot 2 - m \cdot 4 - u - 4 - y \cdot 5u - 4 - 2 \cdot 6y$.

5.4 Решение уравнений с одной переменной

Определение 49. *Уравнением первой степени с одной переменной*, или *линейным уравнением* с одной переменной, называется уравнение вида $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$. Здесь a_1, b_1, a_2, b_2 — постоянные действительные числа, некоторые из них могут быть равными нулю.

Для решения уравнения перенесем слагаемые из правой части в левую, а затем (после приведения подобных членов и дополнительных обозначений) получим уравнение вида $a \cdot x + b = 0$ или $ax = -b$, где $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$

$$a \cdot x + b = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = -b : a, & \text{если } a \neq 0; \\ \text{ур. реш. не имеет}, & \text{если } a = 0, b \neq 0; \\ \text{ур. имеет } \infty \text{ множ. реш.}, & \text{если } a = 0, b = 0. \end{cases}$$

Пусть дано уравнение первой степени вида: $x + ax + bx + cx + \ldots = p$, его корнем будет число $p : (1 + a + b + c + \ldots)$.

Пример № 80. Рассмотрим уравнение: $x + 2x = 6$. Здесь x — неизвестная переменная, значение которой необходимо найти. Приведем подобные члены. $3x = 6$. Разделим левую и правую часть уравнения на 3, получим: $x = 2$. Мы получили, что число 2 является корнем исходного уравнения, т. е. мы решили уравнение.

Пример № 81. Рассмотрим уравнение: $x - 5 = 0$. Здесь x — неизвестная переменная, значение которой необходимо найти. Перенесем константу 5 в левую часть, сменив ее знак $x = 5$. Мы получили, что число 5 является корнем исходного уравнения, т. е. мы решили уравнение.

Задача № 209. Еще в древнем Шумере и Египте умели решать линейные уравнения, а это было более 6 тысяч лет назад. Решите уравнения, аналогичные уравнениям из древне-египетского папируса Райнда.

1) $x - 1 = 0$;
2) $-x - 1 = 0$;
3) $-c + 2 = 0$;
4) $-0 = a - 2$;
5) $-z - 1 = 7$;
6) $a - 2a = 3$;
7) $-c + 12 = 0$;
8) $10 = a - 5$;
9) $0 = z - 14$;
10) $0 = v - 18$;
11) $-2x + 2x = 0$;
12) $-x + 3x = 2$;
13) $-x + x = 0$;
14) $-x - x = -2$;
15) $-x + 2x = 12$;
16) $3x + x = -4$;
17) $x + 9x = 10$;
18) $5x + 7x = 12$;
19) $x + 21x = 22$;
20) $x + 2x - 7 = 4$;
21) $-5x + 6x = 11$;
22) $+2x + 3x = 6$;
23) $-2x + 4x = 2$;
24) $+2x - 3x = -1$;
25) $a - 4 = 9$;
26) $x - 1 = 7$;
27) $c - 8 = 12$;
28) $18 = a - 3$;
29) $26 = x - 4$;
30) $60 = y - 15$;
31) $x - 9 = 1$;
32) $1 = y - 14$;
33) $t - 8 = 0$;
34) $n - 7 = 3$;
35) $x - 4 = 7$;
36) $v - 5 = 23$;
37) $31 = z - 8$;
38) $y - 7 = 12$;
39) $x - 10 = 0$;
40) $x - 1 = 0$;
41) $c + 8 = 0$;
42) $0 = a - 3$;
43) $z - 1 = 10$;
44) $a - 2a = 6$;
45) $c + 23 = 0$;
46) $0 = a - 8$;
47) $0 = z - 20$;
48) $0 = v - 34$;
49) $2x + 5x = 14$;
50) $x + 3x = 12$;
51) $x + 8x = 27$;
52) $x - 9x = 64$.

Задача № 210. Найдите корень уравнения:

1) $x + 2x + 3x - 1 = 12$;
2) $x + 3x + 4x - 2 = 32$;
3) $x + 5x + 9x - 3 = -15$;
4) $x + 5x + 7x + 12x = 25$;
5) $x + 2x + 4x + 21x = -56$;
6) $x + 2x + 4x + 21x - 7x = 42$;
7) $x + 2x + 3x + 4x + 5x = 210$;
8) $x + 2x + 3x + 4x + 5x = -105$;
9) $45 - 23 + x - 1 = -34$;
10) $56 - 45 + 4 + v = 43 - 12$;
11) $90 - 67 - 23 - 101 = -45 - x$;
12) $4 - 3 - 12 - 6 + 90 = -c + 34$;
13) $z - 12 + 69 - 5 - 108 = z + 27$;
14) $37 - 94 + 68 = -38 - y - 34$;
15) $s - 4 + 7 + 9 - s = -34 + s - 5 - s$;
16) $-u - 19 + 569 = -u - u - 3 + u$;
17) $w + 3 - 4 + 78 = 9 - w + 5 - w + 7$;
18) $y + 9 - 57 + y = -6 - y + 52 - y$;
19) $-t + 8 - 3 = -t - 32$;
20) $2 + 5 + 1 = 16 - x$;
21) $45 - 25 = 100 - x - 7$;
22) $x + 3 + 5 = 20 - 10 - 34$;
23) $2 - 83 + 67 = 24 - 12 - 6 - x$;
24) $-x - 7 + 15 - 7 = x + 30$;
25) $4 + 8 - 9 - 4 + x = -2 + 8 - x - 14$;
26) $4 + 8 - 9 - 4 + x = -5 + 8 - x - 14$;
27) $14 + 8 - 9 - 4 - x = -1 - x - 4 - x$;
28) $-19 + 5 - 3 - x = -1 - 9 + 7 - x$;
29) $-x - 12 + 6 - x = 8 - x - 4 - x$.

Задача № 211. Найдите корень уравнения:

1) $a \cdot 4 = 36$;
2) $x \cdot 1 = 7$;
3) $c \cdot 8 = 88$;
4) $18 = a \cdot 3$;
5) $32 = x \cdot 4$;
6) $60 = y \cdot 15$;
7) $x \cdot 9 = 99$;
8) $140 = y \cdot 14$;
9) $t \cdot 8 = 0$;
10) $n \cdot 7 = 21$;
11) $x \cdot 4 = 28$;
12) $v \cdot 5 = 25$;
13) $32 = z \cdot 8$;
14) $y \cdot 7 = 14$;
15) $45 \cdot 23 + x = 3 \cdot 34$;
16) $5 \cdot 4 + 4 + v = 4 \cdot 2$;
17) $9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 9 \cdot x$;
18) $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 + 90 = 4 \cdot c + 34$;
19) $z \cdot 12 + 6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 8 = z + 31$;
20) $3 \cdot 4 \cdot 4 + 64 = 4 \cdot 8 \cdot 2 + 8x$;
21) $s \cdot 4 + 5 + 9 \cdot s = 3 \cdot 4 + s + 5$;
22) $9 \cdot u \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 31 = u \cdot 7 + u$;
23) $w + 3 \cdot 4 + 78 = 9 \cdot w + 5 \cdot w - 1$;
24) $y - 10 + 6 \cdot 7 + y = -3 \cdot 6 \cdot y + 52 \cdot y$;
25) $2 - 8y + 8 \cdot y = 2 \cdot 32$;
26) $(2 + 5 + 1) \cdot (-4) = 16 \cdot x$;
27) $4 \cdot 5 \cdot 100 = 20 \cdot x \cdot 2$;
28) $x + 10 + 50 = 20 \cdot 10 \cdot 30$;
29) $2 \cdot 83 + 122 = 4 \cdot 12 \cdot 6 \cdot x$;
30) $7 \cdot x \cdot 7 + 15 \cdot 2 = x + 30$;
31) $4 + 8 \cdot 9 \cdot 4 + x = 3 \cdot 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3$;
32) $4 + 8 \cdot 9 \cdot 4 + x = 11 \cdot 5 \cdot 2 + 8 \cdot x$;
33) $5 + 9 \cdot 11 \cdot 1 - u = 11 \cdot 5 \cdot 2 - u + 2$;
34) $1 \cdot 9 \cdot 12 - w = 27 \cdot 4 - w$;
35) $x + x \cdot 2 \cdot 3 + x - 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 8$.

Задача № 212. Найдите корень уравнения:

1) $a \cdot 4 = 36 - a + 0 - 7 + 4a$;
2) $9 : 3 - x \cdot 1 = 15 + 6 - 7x$;
3) $-2x - 0 - 6 + 8 = 68 - 12 - 5x$;
4) $222 : 3 = a \cdot 3 - 4 + 23a$;
5) $132 - 32 = x \cdot 4 - 4 - 8x$;
6) $(84 - 52) : 4 = y \cdot 15 + 8 - 45y$;
7) $12 - 9 - x \cdot 9 = 21 \cdot 2x + 99 - 120 - 45x$;
8) $34 - y - 14 = y - 3 \cdot 4 - 56y - 11 \cdot 2$;
9) $5t - t \cdot 8 - 6t = 0 + t - 30$;
10) $15 \cdot 3 + n \cdot 4 = 11 + n + 7 \cdot 13$.

Уравнения с двумя переменными

Определение 50. Рассмотрим уравнение с двумя переменными $f(x;y) = 0$, например, $5x + 10y = 0$. Пара значений переменных, обращающая уравнение с двумя переменными в верное равенство, называется решением уравнения.

Здесь решениями будут $x = 2$ $y = -1$, поскольку при этих значениях уравнение превращается в равенство. Для отыскания решений удобно выражать одну переменную через другую.

Определение 51. Уравнения с двумя переменными называются равносильными, если они имеют одни и те же корни. Для уравнений с двумя переменными справедливы теоремы о равносильных преобразованиях, приведенные для уравнений с одной переменной.

Рассмотрим уравнения с двумя переменными $x - 2y = 7$ При каких значениях переменных x и y получится верное равенство?

Если $x = 7$, а $y = 0$, то $x - 2y = 7$ —- верное равенство.

Если $x = 11$, а $y = 2$, то $x - 2y = 7$ –- верное равенство.

Если же $x = -4$, $y = -8$, то $x - 2y = 7$ —- неверное равенство.

При $x = 0$, $y = 6$, $x - 2y = 7$ —- тоже неверное равенство.

Решением уравнения с двумя неизвестными переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Если дано уравнение с двумя переменными x и y, то принято в записи его решения на первое место ставить значение переменной x, а на второе —- значение переменной y. Так, решениями уравнения $x - 3y = 10$, согласно вышесказанному, будут пары (10; 0) и (16; 2), а пары чисел (-9; -1) и (0; 4) решениями уравнения не являются.

Ясно, что это уравнение имеет и другие решения, более того, уравнение имеет бесконечное множество решений. Для отыскания их удобно выразить одну переменную через другую, например, x через y: $x = 10 + 3y$

Выбрав произвольное значение y, вычисляем соответствующее значение x. Например, если $y = 4$, то $x = 10 + 3 \cdot 4 = 22$, то есть пара чисел (22; 4) тоже является решением нашего уравнения.

Системы двух уравнений с двумя переменными

Определение 52. Пусть даны два уравнения с двумя переменными $f(x;y) = 0$ и $g(x;y) = 0$. Если ставится задача найти все общие решения этих уравнений, то говорят, что надо решить систему уравнений. Каждая пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное числовое равенство, называется решением системы уравнений. Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Определение 53. Две системы уравнений называются равносильными, если эти системы имеют одни и те же решения.

Теорема 5.4.1. *Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными. Если одно уравнение системы оставить без изменений, а другое уравнение системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной.*

Теорема 5.4.2. *Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными. Если одно уравнение системы оставить без изменений, а другое уравнение системы заменить суммой или разностью обоих уравнений, то полученная система будет равносильна заданной.*

Определение 54. Несовместная система уравнений — система, которая не имеет решений. Например, система $2x + y = 4, 4x + 2y = 5$.

Задача № 213. Приведите подобные члены и найдите корень уравнения (если его можно найти):

1) $y - (6x \cdot 3x - 9x) - y = 2 \cdot (3x - y) \cdot 4$;
2) $y - 2x + 3 - 6y - 3x - 4 \cdot 5 = -3 \cdot 2 - 1$;
3) $2x - 2x - 2 \cdot (2y - 4y) - x = 0x - 0 - y$;
4) $r - 3x - x - 1 \cdot 6r - 4r = -7x - 2 - 9 - 0$;
5) $-z - 4z - x - 1z - 5 \cdot x - z \cdot 7 - 5 = 0$;
6) $k \cdot 90k - 3 - w - 3w \cdot 3 = -9k - 8$;
7) $12u - (4k - k) \cdot 2 = -u - k - 4 \cdot 3k - 9 \cdot 1 - 0$;
8) $1 - (7u - 7 \cdot 2u - 8u) \cdot 6 = -u - 9 + 6u$;
9) $10c - (x \cdot 3 - b) - b - 3c \cdot 1 = (x - 6b - 3 - 7) - 5$;
10) $12k - 2z = -(1 \cdot 2z - 2 \cdot 3) \cdot 3 - z - 7z - 6$;
11) $u \cdot z - 6u = 7z \cdot 6(2 \cdot 3z - z - 5u) - 3$;
12) $c - 8y - (5y - 5c - 4y) = c \cdot 15 - 0 - 6 - 5y - y + 3c$;
13) $0y - 1 - 9 \cdot 0 = 3 \cdot y - (0y + 9 \cdot y) \cdot 3 - 25$;
14) $1 + 5 - 0 - 3x - y \cdot 5 - 2x \cdot 0 = -y \cdot 4 - 0 - x$;
15) $(n - 1 - m - 1 \cdot 1n) \cdot y = -5n((-6 - 2) \cdot 4) \cdot 2 - n - y - 0$;
16) $y - 1 \cdot u - m \cdot (2 + (m \cdot 3 - 6) \cdot 2) = m \cdot 2 - u - 4 - (y \cdot 2 - u) - 4 - 2 \cdot 2y$
17) $y - 67 \cdot t + x \cdot (2 + (z \cdot 6) \cdot 3) = z \cdot 4 - x - 2 - (y \cdot 7 - 3u) - 1 - 2t \cdot 9k$.

5.5 Символическая запись элементарных преобразований равенств

1) $A = B \Leftrightarrow\ A \pm C = B \pm C$

$A = B \Leftrightarrow\ A - B = 0$ при $C = B$

2) $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} AC = BC \\ \frac{A}{C} = \frac{B}{C}, \qquad \text{где } C \neq 0 \end{cases}$

3) $A = B \Leftrightarrow\ \frac{1}{A} = \frac{1}{B}$, где $A, B \neq 0$

4) $A = B \quad \overset{n=2k+1}{\Longleftrightarrow} \quad A^n = B^n$

$A = B \quad \overset{A,B\geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad |A| = |B| \quad \overset{n=2k}{\Longleftrightarrow} \quad |A|^{2k} = |B|^{2k}$

5) $A = B \quad \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{n=2k+1}{\Longleftrightarrow}} \quad \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$

6) $A = B \quad \underset{n=2k}{\overset{A,B\geqslant 0}{\Longleftrightarrow}} \quad \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$, где $A, B \geqslant 0$

$A = B \quad \underset{A,B>0}{\overset{n=2k}{\Longleftrightarrow}} \quad \sqrt[2k]{a^{2m}} = \sqrt[2k]{b^{2r}} \ \Rightarrow\ \sqrt[k]{|a|^m} = \sqrt[k]{|b|^r}$

7) $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A \pm C = B \pm D, \text{ где } A, B \in R.$

8) $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \quad \Rightarrow \quad AC = BD, \text{ где } A, B \in R.$

9) $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{C} = \frac{B}{D}, \text{ где } A, B, C, D \in R; C, D \neq 0.$

Глава 6

Решение неравенств

6.1 Неравенства

Определение 55. Два выражения, числовые или буквенные, соединенные знаками «$<$», «$>$», «$\leqslant$», «$\geqslant$» образуют неравенство.

Неравенства основаны на свойстве чисел, заключающемся в том, что их можно сравнивать друг с другом.

Пример № 82. Примеры числовых неравенств: 1) $2 < 5$;
2) $2 \cdot 3 < 10 : 2$; 3) $2 \cdot 3 - 5 < 8 - 5$.

Неравенства бывают верными (истинными) и неверными (ложными) в зависимости от значений выражений. Если значения левой части неравенства и правой части правильно переданы значением знака между ними, то такое неравенство называется верным.

Пример № 83. Примеры верных (тождественных) и неверных числовых неравенств:
верные: 1) $2 < 5$; 2) $2 \cdot 3 < 20 : 2$; 3) $2 \cdot 3 - 5 < 8 - 5$;
неверные: 1) $2 > 5$; 2) $2 \cdot 3 < 10 : 5$; 3) $2 \cdot 3 - 5 \geqslant 8 - 5$.

Если в числовом неравенстве заменить число (одно или несколько) на переменные (буквы), то получим алгебраическое неравенство.

Пример № 84. Примеры алгебраических неравенств: 1) $a < b$;
2) $2 \cdot b < 10 : a$; 3) $a \cdot 2 - 5 < 8 - x$.

Определение 56. Всякое алгебраическое неравенство, верное при всех числовых значениях входящих в него переменных, называется *тождественным*.

Например, верное числовое неравенство является тождественным алгебраическим неравенством.

Пример № 85. Примеры тождественных алгебраических неравенств:
1) $a \cdot b \geqslant b \cdot a$ (более того, здесь имеет место быть тождественное равенство $a \cdot b = b \cdot a$);
2) $(a + b)^2 \geqslant 0$.

К числовым неравенствам, как и к любым другим высказываниям, применимы логические операции. Так, конъюнкция двух неравенств $A = (6 < 7)$ и $B = (7 < 8) \Rightarrow A \wedge B \Rightarrow (6 < 7) \wedge (7 < 8)$ истинна. Для сокращения записи такую конъюнкцию выражают в виде двойного неравенства $6 < 7 < 8$.

Задача № 214. Выполнить конъюнкцию неравенств:
1) $(2 < 5) \wedge (5 < 9)$; 2) $(1 < 2) \wedge (2 < 3)$; 3) $(7 < 8) \wedge (8 < 12)$.

Часто необходимо выполнить дизъюнкцию неравенства $(3 < 5)$ и равенства $(3 = 5)$, дизъюнкция которых истинна, поскольку истинно одно из выражений, в данном случае неравенство. Для сокращения записи такую дизъюнкцию выражают в виде $3 \leqslant 5$.

Задача № 215. Выполнить дизъюнкцию неравенства и равенства:
1) $(1 < 7) \vee (1 = 7)$; 2) $(5 > 2) \vee (5 = 2)$; 3) $(6 > 1) \vee (1 = 6)$.

Если в числовом выражении выполнить все действия в указанном порядке, то в результате получим действительное или иное число, про которое говорят, что оно равно данному числовому выражению. Так, числовое выражение: $1 + 5$ равно 6, а выражение: $(2 \cdot 3) - 4$ равно 2 и т.д. Поэтому пишут вместо слова 'равно' знак '=', а вместо больше и меньше: $>$, $<$.

Задача № 216. Вычислите и определите верно ли неравенство:
1) $1 + 5 < \frac{1}{7} + \frac{5}{8}$;
2) $(2 \cdot 3) - 4 > \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{18}\right)$;
3) $\left[(982 - 111) : 3 + \frac{2-22}{9}\right] \cdot (7 - 3) > (7 - 2) \cdot 0$.

Задача № 217. Определите где верное числовое неравенство, а где нет:
1) $1 + 5 \cdot 3 > \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{5}{8}$; 2) $(6 \cdot 5) - 5 > \left(\frac{6}{4} - \frac{23}{56} \cdot \frac{1}{19}\right)$;

Скобки в числовых (и алгебраических) выражениях задают порядок действий. Сравните порядок выполнения действий в примерах и результат вычислений числовых выражений:

Пример № 86. Пример числовых выражений со скобками и без скобок. Проверьте правильность записи:

$$6 - 1 + 5 \cdot 3 > 15; \quad (1 + 5 + 8) \cdot 4 > 21;$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} : \frac{7}{3} < \frac{1}{34}; \quad \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right) : \frac{21}{3} > \frac{18}{96}.$$

Задача № 218. Верны или неверны следующие неравенства:
1) $2 - 6 + 4 < 7$;
2) $7 - 2 \cdot 3 > -3$;
3) $5 - 4 + 3 < 7$;
4) $12 - 3 \cdot 2 > -7 - 24$;
5) $56 \cdot 89 - 45 \cdot 78 < 234 \cdot 61$;
6) $34 \cdot 9 - 34 > 56 \cdot 12 + 7$;
7) $-1 - 2 + 3 + 4 > 10 + 1 + 0 - 3$;

6.2 Свойства числовых неравенств

Утверждение. Если $a < b$, то $b > a$; если $a > b$, то $b < a$.

Пример № 87. Пусть есть числа 5 и 7. Сравнивая их, можно записать $5 < 7$. Но по утверждению это неравенство можно записать как $7 > 5$.

Задача № 219. Записать всеми возможными способами отношения между числами: 1) 10 и 19; 2) -7 и 5; 3) 120 и 101; 4) -57 и -47.

Утверждение. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Пример № 88. Пусть Петя и Вася задумали по числу, подошли к Коле и спросили, может ли он сказать у кого из них число больше, задав каждому по одному и тому же вопросу. Коля спросил каждого, больше или меньше их число числа 5. Петя ответил больше, а Вася меньше. Сможет ли Коля узнать у кого из ребят число больше?

Ответ. Да, сможет. Поскольку число Васи меньше 5, а 5 меньше числа Пети, то на основании утверждения можно сказать, что число Пети больше.

Задача № 220. Сможет ли Коля сказать у кого число больше, если ответы были: 1) меньше — у Пети, больше — у Васи; 2) оба ответили больше?

Утверждение. Если $a < b$ и c — любое число, то $a+c < b+c$, т. е. если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.

Пример № 89. Пусть дано, что $a < b+6$. Что можно сказать о числах $b-3$ и $a-9$?

Решение. Прибавим к обеим частям неравенства $a < b+6$ число -9. Тогда получим, что $a-9 < b-3$. По первому утверждению $b-3 > a-9$.

Задача № 221. Что можно сказать о числах 1) $2a-3$ и b; 2) $a-3$ и $b-a$; 3) $2b$ и $2a+b+10$, если $2a > b+3$?

Утверждение. Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$; если $a < b$ и c — *отрицательное число*, то $ac > bc$.

Другими словами, если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

Пример № 90. Пусть дано, что $-2a+3 > a$. Что можно сказать о числе а?

Решение. Прибавим к обеим частям исходного неравенства число $-a-3$. Получим $-3a > -3$. Умножим неравенство на $-\frac{1}{3}$. Поскольку $-\frac{1}{3} < 0$? надо изменить знак неравенства. Получим $a < 1$.

Утверждение. Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Также и взятие обратных чисел, если слева и справа стоят числа разных знаков: $3 > -4 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{-4}$.

Пример № 91. Мы знаем, что $-3 < -\frac{1}{2}$. Как можно доказать на основании этого, что $\frac{1}{3} < 2$?

Решение. Умножим обе части неравенства $-3 < -\frac{1}{2}$ на -1. Получим: $3 > \frac{1}{2}$. Так как оба числа в неравенстве положительные, то можно воспользоваться утверждением, тогда $\frac{1}{3} < 2$.

Задача № 222. 1) Докажите, что $4 > 0{,}1$, если известно, что $-0{,}25 > -10$; 2) Докажите, что $5 > 3\frac{1}{2}$, если известно, что $0{,}2 < \frac{2}{7}$.

Утверждение. Если $a < b$ и $c < d$, то $a+c < b+d$, т. е. если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

Пример № 92. Пусть дано, что $a + 2 < b - 3$. Сравните числа a и b.

Решение. Известно, что $-2 < 3$. Почленно сложим это неравенство с исходным $a + 2 - 2 < b - 3 + 3$, то есть $a < b$

Задача № 223. Пусть известно, что $a > b$. Сравните числа: 1) $a + 6$ и $b - 2$; 2) $3a - 4$ и $2b + a - 10$; 3) $b - a + 3$ и 6.

Утверждение. Если $a < b$ и $c < d$, причем a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$, т. е. если перемножить почленно верные неравенства одного знака, в которых левые и правые части являются положительными числами, то получится верное неравенство.

Пример № 93. У Толи есть больше 3 коробок конфет, а в каждой коробке больше 10 конфет. Сможет ли Толя угостить 4 своих друзей шестью конфетами каждого?

Решение. Пусть у Толи есть a коробок и в каждой b конфет. Из условия известно, что $a > 3$ и $b > 10$. Значит, по утверждению получаем, что $a{\cdot}b > 30$? то есть у Толи больше 30 конфет. На друзей ему требуется $4{\cdot}6 = 24$ конфеты. Так как $a \cdot b > 30 > 24$, то у Толи достаточно конфет, чтобы угостить своих друзей.

Задача № 224. Хватит ли конфет Толе, если 1) у него есть больше пяти коробок, а в каждой коробке более 5 конфет; 2) он хочет угостить каждого друга девятью конфетами; 3) у него меньше 4 коробок, а в каждой из них менее 8 конфет?

Задача № 225. Верно ли, что: 1) если $x > 3$, то $x^2 > 9$; 2) если $x > 3$, то $x^2 > 3x$; 3) если $x > 3$, то $x^3 > 9x$; 4) если $x < 3$, то $x^2 < 9$; 5) если $x < 3$, то $x^2 < 3x$; 6) если $x < 3$, то $x^3 < 3x^2 + 1$?

6.3 Решение простейших неравенств

На основе свойств числовых неравенств опишем операции, которые можно производить над неравенствами.

В общем случае, если выполнить некую допустимую операцию над левым числовым выражением в неравенстве и точно такую же операцию с правым числовым выражением неравенства, то получим неравенство, имеющее тот же смысл (знак) или противоположный. Кроме того, эти неравенства верны или неверны одновременно. Поэтому если в неравенствах присутствует переменная, то эти неравенства будут иметь одинаковое множество значений переменной, при которых каждое из них является верным.

Пример № 94. Умножим левую и правую часть неравенства $2+3>4$ на число 7:

Числовое выражение: $2+3>4 \to$ допустимая операция: $7\cdot(2+3)>7\cdot 4$

Пример № 95. Умножим левую и правую часть неравенства $2+3>4$ на число -1:

Числовое выражение: $2+3>4 \to$ допустимая операция: $(-1)\cdot(2+3)<(-1)\cdot 4$

Допустимые операции, не меняющие знак числового неравенства:

1) Сложение
2) Вычитание
3) Умножение на положительное число
4) Деление на положительное число
5) Возведение в нечётную степень
6) Взятие обратных чисел, если слева и справа стоят числа разных знаков

Пример № 96. Выполним допустимые операции над левой и правой частью числового выражения $2+1>-4$.

1) Сложение: $3+2+1>3+(-4)$.
2) Вычитание: $2+1-3>-4-3$.
3) Умножение на положительное число: $2\cdot(2+1)>2\cdot(-4)$.
4) Деление на положительное число: $\frac{2+1}{2}>\frac{-4}{2}$.
5) Возведение в нечётную степень: $(2+1)^3>(-4)^3$.
6) Взятие обратных чисел, если слева и справа стоят числа разных знаков: $\frac{1}{2+1}>\frac{1}{-4}$.

Допустимые операции, меняющие знак числового неравенства:

1) Умножение на отрицательное число
2) Деление на отрицательное число
3) Взятие обратных чисел, если слева и справа стоят числа одинакового знака

Пример № 97. Выполним допустимые операции над левой и правой частью числового выражения $5+1>4$.

1) Умножение на отрицательное число: $(-2)\cdot(5+1)<(-2)\cdot 4$.
2) Деление на положительное число: $\frac{5+1}{-2}<\frac{4}{-2}$.
3) Взятие обратных чисел к ненулевым, если слева и справа стоят числа одинакового знака: $\frac{1}{5+1}<\frac{1}{4}$.

Примечание. При возведении в четную степень нельзя сказать однозначно, с каким знаком получится неравенство. Это зависит от знаков левого и правого выражений и их модулей.

Пример № 98. Выполним операцию над левой и правой частью числового выражения $5+1>4$, умножив их на -1:

$$-1\cdot(5+1)<-1\cdot(4)\ \rightarrow\ -(5+1)<-4\ \rightarrow\ -6<-4$$

Определение 57. Решить неравенство значит указать границы, в которых должны заключаться значения неизвестных величин, чтобы неравенство было верным (тождественным в указанных границах).

Здесь мы будем рассматривать только неравенства, которые называются линейными, кроме того, зависящие только от одной переменной. Чтобы решить эти неравенства надо выполнить допустимые операции, в результате которых переменная будет стоять с одной стороны знака, а некоторое число с другой. Полученное неравенство и будет ответом, так как при допустимых операциях получаются неравенства с одинаковыми решениями.

Пример № 99. Решим следующие неравенства:

1) $a<3$; Это неравенство верно, если $a<3$;
2) $a\cdot 3<12$; это неравенство верно, если $a<4$, так как при делении на 3 левой и правой частей неравенства его смысл не меняется;
3) $a\cdot 3\leqslant 12$; это нестрогое неравенство верно, если $a\leqslant 4$.

Задача № 226. Решите следующие элементарные неравенства:

1) $a-3>a-7$;
2) $2-a-3<5+a-a$;
3) $12-a>2-a+10$;
4) $2+a-3\leqslant a-3$;

5) $5 - x - 4 \geqslant 2 - x + 7 + x$;
6) $6 + a > 2 - a + a$;
7) $3 - y - 4 \geqslant -y + 3 - 5$;
8) $8 - x - 3 \leqslant 5 - x - 4 + x$;
9) $12 - y > 2 - y + 10 - 5 - 6 + y$;
10) $21 - y - 3 > -y + 7$;
11) $0 \geqslant 5 - a$;
12) $-12 - y \leqslant 2 - y + 0 + 0$.

Задача № 227. Решите следующие неравенства:
1) $2a > a \cdot 3$;
2) $2 \cdot a - 3 \leqslant 5 \cdot a - a$;
3) $12a > 2a + 10$;
4) $2a - 3 \geqslant a \cdot 3$;
5) $5 \cdot x - 4 < 2 \cdot x + 7 \cdot x$;
6) $6a > 6a \cdot a$;
7) $3y - 4 \leqslant y \cdot 3 - 5$;
8) $8x - 3 < 5x - 4x$;
9) $12y \geqslant 2y + 10 - 56y$;
10) $21y - 3 \leqslant y \cdot 7$;
11) $0 < 5 \cdot a - a$;
12) $12y \leqslant 2y + 0 \cdot 0$.

6.4 Элементарные преобразования неравенств

Ранее мы уже изучали неравенства на элементарном уровне. Теперь рассмотрим их более подробно.

Допустим, что задано неравенство двух алгебраических выражений A и B, имеющих общую область допустимых значений (ООДЗ), причем $A > B$. Неравенство не нарушится (сохранится) или его смысл изменится на противоположный, если будет осуществлено одного из следующих 10 элементарных преобразований:

1) К правой и левой частям неравенства можно прибавить (или вычесть) одно и то же число (выражение), причем ООДЗ(A, B) не изменяется. Символическая запись преобразования:
   $A > B \Leftrightarrow \ A \pm C > B \pm C$
   Частный случай: $C = B$. Тогда $A - B > B - B$, т.е. $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$
   Данное преобразование используется для доказательства того, что одно выражение больше другого (как правило, разность $A - B$ имеет простой вид).

2) Если обе части неравенства умножить (разделить) на положительное число (выражение), то неравенство сохранится, а если умножить (разделить) на отрицательное число (выражение), то смысл неравенства изменится на противоположный. Символическая запись преобразования:

$$\begin{cases} A > B \text{ и } C > 0 \Leftrightarrow \ AC > BC \\ A > B \text{ и } C < 0 \Leftrightarrow \ AC < BC \end{cases}$$

Частный случай: $C = \frac{1}{B} > 0$.
$A > B > 0 \ \Rightarrow \ \frac{A}{B} > 1$,
$0 > A > B \ \Rightarrow \ \frac{A}{B} < 1$

Пример № 100. Если $A - B > 0$, то $(-1)(A - B) = B - A < 0$.

3) При умножении любого числа A (или выражения) на число C, где $|C| < 1$, модуль числа A уменьшится, а при $|C| > 1$ модуль числа A увеличится. Символическая запись:

$$|C| < 1 \Leftrightarrow \ |AC| < |A|, \qquad \text{и} \qquad |C| > 1 \Leftrightarrow \ |AC| > |A|$$

4) Симметричность
5) Транзитивность
6) Если A и B одного знака (оба положительные или оба отрицательные), то при переходе к обратным величинам в обеих частях неравенства (деление «единицы» на неравенство), смысл неравенства изменяется на противоположный. Символическая запись преобразования:

$$A > B > 0 \overset{1:A,B}{\Longleftrightarrow} 0 < \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$$

$$0 > A > B \overset{1:A,B}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{A} < \frac{1}{B} < 0$$

Пример № 101.

(а) $5 > 2 \overset{1:A,B}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$;

(б) $-2 > -5 \overset{1:A,B}{\Longleftrightarrow} -\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$.

Таким образом, изменение знаков левой и правой частей неравенства (умножение неравенства на «-1») так же, как переход к обратным величинам в обеих частях неравенства, приводит к изменению смысла неравенства на противоположный.

Пример № 102.

(а) $5 > 2 \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} -5 < -2 \overset{1:A,B}{\Longrightarrow} -\frac{1}{5} > -\frac{1}{2} \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} \frac{1}{5} < \frac{1}{2} \overset{1:A,B}{\Longrightarrow} 5 > 2$ Завершился цикл преобразований неравенства с использованием умножения на «-1» и переходом к обратным величинам.

(б) Если A и B разных знаков, т.е. $AB < 0$, то при переходе к обратным величинам смысл неравенства сохраняется, так как операция «переход к обратным величинам» не изменяет знака выражения.

$2 > -5 \overset{1:A,B}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} > -\frac{1}{5} \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} -\frac{1}{2} < \frac{1}{5} \overset{1:A,B}{\Longrightarrow} -2 < 5.$

7) Из обеих частей неравенства можно извлечь корень нечётной степени или обе части неравенства можно возвести в нечётную степень при любых A и B. Символическая запись преобразования:

$$\begin{cases} A > B \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{n=2k+1}{\Longleftrightarrow}} \sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B}, \text{ где } A, B \in (-\infty, +\infty) \\ A > B \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{n=2k+1}{\Longleftrightarrow}} A^n > B^n, \text{ где } A, B \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Пример № 103.

(а) $27 > 8 \overset{n=3}{\Longrightarrow} \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{8} \;\Rightarrow\; 3 > 2;$

(б) $-8 > -27 \overset{n=3}{\Longrightarrow} \sqrt[3]{-8} > \sqrt[3]{-27} \;\Rightarrow\; -2 > -3;$

8) При возведении в чётную степень $n = 2k$ или извлечении корня чётной степени возможны 3 варианта (в зависимости от знаков правой и левой частей неравенства):

(а) $A > B > 0 \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{n=2k}{\Longleftrightarrow}} A^n > B^n;$

$A > B > 0 \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{n=2k}{\Longrightarrow}} \sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B}$

Итак, при $A, B > 0$ смысл неравенства сохраняется как при извлечении корня чётной степени, так и при возведении в чётную степень.

(б) $0 > A > B \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{n=2k}{\Longrightarrow}} A^n < B^n$

Извлечение корня чётной степени из отрицательного числа не имеет смысла в поле действительных чисел.

(в) $A > 0 > B > -A \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{n=2k}{\Longrightarrow}} A^n > B^n$

$A > 0 > -A > B \underset{k\in\mathbb{N}}{\overset{n=2k}{\Longrightarrow}} A^n < B^n$

(смысл неравенства изменяется на противоположный).

Выражение $\sqrt[2k]{A}$ определено, т.к. $A > 0$, а выражение $\sqrt[2k]{B}$ не определено, т.к. $B < 0$. Поэтому сравнение $\sqrt[2k]{A}$ и $\sqrt[2k]{B}$ невозможно (не имеет смысла) в поле действительных чисел.

Два неравенства одного и того же смысла можно сложить. Символическая запись:

$$\begin{cases} A > B \text{ и } C > D \overset{+}{\Longrightarrow} A + C > B + D \text{ где } A, B \in (-\infty, +\infty) \\ A < B \text{ и } C < D \overset{+}{\Longrightarrow} A + C < B + D \text{ где } A, B \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

Пример № 104.

(а) $5 > 2$ и $7 > 4 \overset{+}{\Longrightarrow} 12 > 6$,

(б) $2 < 5$ и $4 < 7 \overset{+}{\Longrightarrow} 6 < 12$,

9) Из большей части одного неравенства можно вычесть меньшую часть другого неравенства и, соответственно, из меньшей части 1-го неравенства можно вычесть большую часть 2-го неравенства. Символическая запись:
$A > B$ и $C > D \overset{-}{\Longrightarrow} A - D > B - C \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} C - B > D - A$.
Пример № 105.
$5 > 2$ и $7 > 4 \overset{-}{\Longrightarrow} 5 - 4 > 2 - 7 \;\Rightarrow\; 1 > -5 \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} -1 < 5$
$5 > 2$ и $7 > 4 \overset{-}{\Longrightarrow} 7 - 2 > 4 - 5 \;\Rightarrow\; 5 > -1$.

10) Преобразование неравенств, содержащих абсолютные величины.
Имеем 2 определения абсолютной величины:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 0 \\ -x & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x = \begin{cases} |x| & \text{при } x \geqslant 0 \\ -|x| & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Объединяя два определения абсолютной величины, получим цепочку неравенств (или «длинное»неравенство) согласно принципу транзитивности: $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
Равенство при $x < 0$, неравенство при $x > 0$ (транзитивность из 2 неравенств: $-|x| < 0$ и $0 < x$)
Равенство при $0 \leqslant x$ неравенство при $x < 0$ (транзитивность из 2 неравенств: $x < 0$ и $0 < |x|$)
Свойства абсолютной величины:

(а) $|ab| = |a||b|$ и $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0; a, b \in (-\infty, +\infty)$

(б) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ или $|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|$.

(в) $|a + b| \geqslant \big||a| - |b|\big| \geqslant |a| - |b|$,

(г) $|a - b| \geqslant |a + (-b)| \geqslant \big||a| - |-b|\big| = \big||a| - |b|\big| \geqslant |a| - |b|$.

Общее логическое соотношение (длинное неравенство)
$|a| + |b| \geqslant |a + b| \geqslant \big||a| - |b|\big| \geqslant |a| - |b|$, где $a, b \in (-\infty, +\infty)$.
Пример № 106.
$a = 7,\ b = -5:\ 7 + |-5| \geqslant |7 - 5| \geqslant \big|7 - |-5|\big| \geqslant 7 - |-5|$.

Глава 7

Об элементарной и высшей математике

Математика — это наука о количественных отношениях и пространственных формах объективного мира.

Термин «математика» происходит от двух греческих слов: $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ — матема (познание, наука) и $\tau\varepsilon\chi\nu\eta$ — технэ (искусство). Сочетание этих слов можно перевести как «искусство познания».

Условно различают элементарную математику, высшую математику и вычислительную математику. Такое разделение обусловлено историческими периодами развития математики.

Можно выделить 4 периода развития, которые имеют качественные отличия как по методам исследования, так и по существу решаемых задач. Рассмотрим эти периоды и их отличия.

Начальный период — это период зарождения математики. Математика возникла в глубокой древности на основе естественных потребностей в ведении счёта объектов, измерении времени, расстояний, площадей, а также в осуществлении астрономических расчётов.

Материальные свидетельства этого периода относятся к Древней Руси, к Древней Индии, к Древнему Египту (математические папирусы, XXI–XVIII вв. до н. э.), Древнему Вавилону и Ассирии (математические клинописные тексты на глиняных пластинах, XX век до н. э.) и другим древним цивилизациям.

Начальный период продолжался до VI–V веков до н. э., включая достаточно большой переходный период.

Период элементарной математики, включающей арифметику, алгебру, геометрию плоскости и трёхмерного пространства, тригонометрию.

Элементарная математика — это математика постоянных величин, основанная на понятиях «число», «операции над числами», «отношения между элементами множества» и других.

Термин «арифметика» образован из двух греческих слов: $\alpha\rho\acute{\imath}\theta\mu o\xi$ — аритмос (число) и $\tau\varepsilon\chi\nu\eta$ — технэ (искусство). По аналогии, сочетание этих двух слов можно перевести как «искусство числа».

Элементарная математика развивалась до XVII века н. э., когда в её недрах появились элементы высшей математики.

Период высшей математики (XVII–XIX вв. н. э.) — это период возникновения понятий «переменная величина», «бесконечно малая величина», «предел» и других, а также разработки методов математического анализа и их широкого применения для изучения процессов в динамике

(движении, развитии). В этот период возникли такие математические дисциплины, как высшая алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления.

Период современной математики (XIX–XXI вв.). В этот период возникают обобщения понятий «функция» и «операция», появляются понятия «функционал» и «оператор», развиваются новые самостоятельные математические дисциплины: неевклидова геометрия (например, Лобачевского, Римана), дифференциальная геометрия, функциональный анализ, математическая логика, теория вероятности, вычислительная математика, теория множеств и другие.

В настоящее время наблюдается интенсивное развитие математических методов и идей под влиянием запросов практики в различных областях естествознания: физики, механики, астрономии, химии, биологии, гуманитарных наук. Особенно быстро развиваются численные методы решения математических задач (вычислительная математика). Это обусловлено появлением в середине XX века быстродействующих электронных вычислительных машин.

7.1 Постоянная и переменная величины

Одним из основных, первичных математических понятий является понятие «величина». Оно основывается на естественных, природных способностях человека, а именно на способности

— наблюдать объекты и процессы реального мира, вести счёт, определять количество объектов, оценить качественно результат подсчёта: мало или много;
— выявлять свойства и отличительные признаки объектов; выделять группы однородных объектов (с некоторым общим признаком);
— сравнивать однородные объекты по заданным дополнительным признакам; выделять среди них, так называемые, эталонные объекты, которые принимаются как средство для установления сравнительных характеристик различных объектов без их непосредственного сопоставления (т. е. путём измерения, например, выбор единичного отрезка для измерения длины, выбор единичного квадрата для измерения площади, выбор единичной окружности для характеристики элементов окружности произвольного радиуса;
— определять способ сопоставления любого объекта с эталонным объектом, т. е. способ измерения, способ получения числовой характеристики каждого из наблюдаемых объектов;
— объединять измеренные числовые значения в одно множество под именем некоторой величины; так возникает понятие «величины» как множества измеряемых характеристик объектов или процессов.

Различают четыре вида величин: постоянные величины, переменные величины, случайные величины и параметры.

Постоянная величина (константа, от лат. constans — постоянство) — это величина, которая в некотором процессе сохраняет своё значение неизменным. Постоянная величина x обозначается кратко как $x = \text{const}$.

Примеры постоянных величин.

1) Отношение длины окружности S к её диаметру d есть величина постоянная, обозначенная греческой буквой π и равная 3,14159265...
2) Скорость света в вакууме (пустоте) есть константа, обозначенная латинской буквой c и равная примерно 300 000 км/с.
3) Ускорение свободного падения тел в пустоте под воздействием силы притяжения Земли вблизи её поверхности есть величина постоянная, обозначенная латинской буквой g и приблизительно равная 9,8 м/с^2.

Переменная величина — это величина, которая характеризует определённое свойство наблюдаемого объекта (физических объектов, процессов и явлений) и принимает различные числовые значения. Говорят, что «переменная задана», если известны все её допустимые значения, т. е. указано множество её допустимых значений на числовой оси (интервал, отрезок, полупрямая, вся числовая ось, какие-то специальные множества). *Множество допустимых значений* переменной иногда называют *диапазоном изменения* переменной.

Примечание. Постоянная величина рассматривается как частный случай переменной величины, когда множество её допустимых значений состоит только из одного числа (т. е. диапазон изменений вырождается в точку).

Известный английский физик и математик Исаак Ньютон (1643–1727), член Лондонского Королевского общества, президент Лондонского Королевского общества, директор Монетного двора (министр финансов) и др., называл переменные величины *флюентами* — текущими (от лат. *fluor* — течение, *fluidus* — текучий), т. е. описывающими течение процессов, непрерывное движение и т. п.

Примеры переменных величин.

1) Скорость свободного падающего тела (непрерывно возрастает с течением времени).
2) При нагревании тела его температура непрерывно увеличивается, при охлаждении — уменьшается.
3) Примером непрерыно возрастающей переменной величины является *время*, которое, наряду с пространством, образует объективный мир (действительность). Течение времени необратимо. Однако, силой воображения, мысленно ход времени можно обратить вспять.

Понятие «переменная» возникло в XVII веке под влиянием потребностей естествознания, когда потребовалось изучать не только состояние, но и движение объектов, процессов.

Примечание. В современной математике понятие «переменная» имеет более общий характер, чем первоначальное понятие (в XVII веке). Под переменной величиной понимается набор характеристик. Такой набор называется *многомерной переменной* или *переменным вектором*. Конкретное значение многомерной переменной называется точкой многомерного пространства. В отличие от многомерной переменной, отдельно взятая переменная называется *скалярной* величиной (от лат. *scalaris* — лестничный, ступенчатый).

Случайная величина — это некоторая переменная величина, которая может принимать от случая к случаю то или иное значение с определённой вероятностью. Классическим примером является следующий. На 6 гранях игрального кубика нанесены числа от 1 до 6. При каждом бросании кости на её верхней грани выпадает с вероятностью $\frac{1}{6}$ (при условии симметричности кубика) одно из указанных чисел. Это число является случайной величиной.

Параметр (от греч. $\pi\alpha\rho\alpha\mu\varepsilon\tau\rho\omega\nu$ — параметрон (отмеривающий)) — вспомогательная переменная, заданная множеством значений, которые используются для различения элементов какого-либо множества, например, однотипных задач. В пределах данной задачи значение параметра остаётся постоянным, но в другой задаче значение параметра выбирается другим. Таким образом, с помощью различных значений параметра видоизменяется условие задачи. По своему существу параметр является условно-постоянной величиной.

Алгебраическое выражение, уравнение или неравенство, содержащее в своём составе параметрические величины, называются параметрическими. В параметрических выражениях (параметрических задачах), как правило, указываются правила изменения значений параметра (или нескольких параметров).

С помощью параметров удобно задавать начальные условия движения, процесса и т. п. Например, если свободное падение тела начинается с высоты h, то в момент падения тела на землю скорость тела будет зависеть от параметра h, значения которого можно изменять.

Если в математических моделях реального мира используется несколько величин, то учитывается их физический смысл. Две величины называются *однородными*, если они имеют одинаковый физический смысл, и *неоднородными* (*разнородными*), если они характеризуют разные физические категории.

Например, однородными будут величины, характеризующие длину, ширину, высоту объекта реального мира, так как они имеют одинаковый фи-

зический смысл, а именно смысл *пространственной протяжённости*, или *расстояния между точками пространства*.

Однородные величины можно складывать и вычитать, при этом физический смысл не изменяется. Например, периметр треугольника ести сумма длин сторон этого треугольника.

Однородные величины можно умножать и делить, но при этом физический смысл меняется. Например, произвдение длины прямоугольника на его ширину есть его площадь, а площадь, умноженная на некоторую высоту даст объём.

Такие величины, как площадь, масса и время являются разнородными, так как имеют разный физический смысл. Разнородные величины нельзя складывать, так как результат сложения не имеет физического смысла. Например, трудно придумать разумное толкование суммы площади и массы. Но разнородные величины можно умножать и делить друг на друга. При этом физический смысл их меняется, т. е. появляется новая величина с новым физическим смыслом. Например, путь, делённый на на время есть скорость, произведение массы на ускорение есть сила.

Две однородные величины называются *соизмеримыми*, если для них можно найти *общую меру* (эталонный объект, мастштабную единицу), которая однородна с исходными величинами и содержится в них целое число раз. Эталонная величина называется *единицей измерения*. Например, длину, высоту и ширину часто можно измерить в метрах и сантиметрах.

Физический смысл величины (эталонной величины, масштабной единицы) называется *размерностью* величины и указывается в квадратных скобках рядом с её обозначением. Например, x [длина], v [скорость]. Вместо физического смысла в квадратных скобках может указываться единица измерения, которой измеряется данная величина. Например, S [м^2].

Числовое значение величины вместе с наименованием единицы измерения называется *именованным числом*. Например, 3 м (три метра), 10 см^2 (десять квадратных сантиметров), 5° (пять градусов) и т. п.

Если величина не связана с физическими характеристиками объектов реального мира, то она называется *безразмерной* величиной или величиной *отвлечённой*, не имеющей размерности. Числовое значение безразмерной величины (без указания единицы измерения) называется *отвлечённым* или *абстрактным* числом.

Величины, не имеющие общей меры, называются *несоизмеримыми*. Отношение несоизмеримых величин есть *отвлечённое иррациональное число*.

7.2 Функциональная зависимость между переменными величинами

Функция (от лат. *functio* — исполнение, осуществление) — одно из основных понятий математики, выражающее зависимость одних переменных величин от других.

Рассмотрим две переменные величины x и y, представленные множествами числовых значений $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$. Если каждому значению $x \in X$ поставлено в соответствие одно и только одно $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция со значениями в множестве Y. Функциональная зависимость кратко обозначается равенством

$$y = f(x), \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Независимая переменная x называется *аргументом функции* (от лат. *argumentum* — довод), при изменении которого изменяется определённым образом зависимая переменная y.

Множество X допустимых значений переменной x называется *областью определения* функции или областью допустимых значений (ОДЗ). Областью определения функции может быть произвольное множество.

Множество $Y = f(X)$, состоящее из всех значений y, которые соответствуют хотя бы одному значению x, называется *областью значений функции*.

Если по каждому значению $y \in Y$ можно однозначно определить то значение x, для которого $y = f(x)$, то говорят, что задана *обратная функция* $x = \varphi(y)$. Для неё $\varphi(f(x)) \equiv x$.

Если задана цепочка функциональных зависимостей вида $y = f(x)$, $z = g(y)$, то можно кратко записать $z = g(f(x))$ или $z = (f \circ g)(x)$. В этом случае говорят, что задана *сложная функция* z от аргумента x.

Способы задания функций. Существует 4 наиболее распространённых способа задания функций: табличный, аналитический, алгоритмический и графический.

Табличный способ задания функции заключается в том, что задаётся упорядоченная последовательность допустимых значений аргумента x и соответствующие им значения функции $y = f(x)$. Табличный способ используется в том случае, когда ОДЗ аргумента x есть некоторое конечное множество.

Аналитический способ задания функций — самый распространённый. В этом случае задаётся алгебраическое выражение (формула), которое содержит переменную величину x и перечень математических и логических операций, выполняемых над x для получения соответствующего значения функции $y = f(x)$. В данному случае буква «f» символизирует формулу.

Вместо явного выражения функции $y = f(x)$ можно задать уравнение вида $F(x, y) = 0$, где левая часть есть алгебраическое выражение, содержащее обе переменные x и y. Такое задание функции называется *неявным* (т. е. нет явного выражения y через x).

Примечание. Строго говоря, выражение $F(x, y) = 0$ в общем случае задаёт не функцию, так как одному значению x может соответствовать несколько значений y, для которых правая часть обращается в ноль. Однако во многих случаях из уравнения $F(x, y) = 0$ с помощью конечного числа преобразований можно получить явную формулу $y = f(x)$. Например, если $F(x, y) = y - 5x$, то из уравнения $y - 5x = 0$ можно в одно действие выразить y: $y = 5x$.

Связь между переменными x и y может быть задана и с помощью вспомогательной переменной t, которая называется параметром. В этом случае задаются две параметрические формулы, т. е. 2 функции от t: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. В общем случае, опять же, такое соответствие не является функцией, но часто можно выразить параметр t из равенства $x = \varphi(t)$: $t = \varphi^{-1}(x)$ (существует обратная функция) и подставить его в равенство $y = \psi(t)$: $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$.

Например, пусть заданы 2 параметрические формулы $x = 5t$ и $y = 25t^2$. Тогда из первого равенства можно получить $t = \frac{1}{5}x$ и подставить это выражение во второе: $y = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}x\right)^2 = x^2$.

Итак, при аналитическом задании функции возможны три различные формы представления функциональной зависимости между переменными x и y: явное, неявное и параметрическое.

Алгоритмический способ задания функций — это задание системы правил, которые должны быть выполнены для получения последовательности значений функции шаг за шагом.

Алгоритм — искажение имени великого узбекского математика Абу Абдаллы Мухамеда бен Мусы аль Маджуси аль Хорезми (787–850 гг.). Он впервые описал на арабском языке индийскую позиционную десятичную систему счисления. Названием операции *аль-джебр*, состоящей в переносе членов алгебраического выражения из одной части в другую с изменением знака, обозначил самостоятельную ветвь математики — алгебру. Его труды в XII веке были переведены на латинский язык, а его искажённым именем стали называть арифметику, а позднее всякую систему правил для вычислений.

Примерами простейших алгоритмов являются правила сложения и умножения многозначных чисел «столбиком», правила «быстрого» умножения многозначных чисел, метод приближённого извлечения квадратного корня из числа и другие.

Как правило, алгоритм представляет собой сочетание словесного описания правил, логических условий и вычислительных формул — элементов алгоритма.

Любой алгоритм содержит 7 типовых составных частей, а именно:

1) совокупность возможных исходных данных, т. е. область определения функции, заданной алгоритмическим способом;
2) совокупность промежуточных результатов на каждом шаге вычислений;
3) совокупность возможных результатов, т. е. область значений функции;
4) правило начала, т. е. описание первого шага вычислений или преобразований;
5) правило непосредственной переработки информации;
6) правило окончания (описание условия завершения алгоритмического процесса);
7) правило извлечения результата вычислений.

Алгоритмический способ задания функций широко используется на современных электронных вычислительных машинах. Более того, всякая вычислительная машина представляет собой физическую реализацию алгоримтов сложения и умножения и других операций.

Понятие «алгоритм» принадлежит к числу основных первоначальных понятий математики, не допускающих определения в более простых терминах.

Графический способ состоит в следующем. Если на плоскости задана система координат (для простоты — прямоугольная декартова), то кривая, состоящая из таких точек с координатами x и y, где $y = f(x)$, называется *графиком* функции f. Координата x называется *абсциссой*, координата y — ординатой. График — наглядное геометрическое изображение зависимости между переменными величинами (см. рис.).

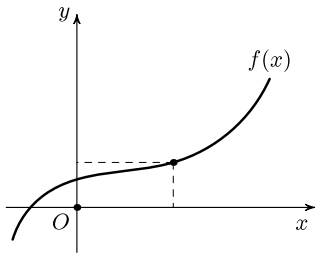


Рис. 7.1. График функции

Чтобы по графику функции определить, какое значение y_0 соответствует какому-то значению x_0, из точки с координатой $(x_0, 0)$ (точка на оси абсцисс) проводится прямая, параллельная оси ординат до пересечения с графиком функции, а затем из точки проводится прямая, параллельная оси абсцисс до пересечения с осью ординат. Эта точка имеет координаты $(0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Иногда для получения таблицы значений функции выбираются

точки уже на графике, а значения x и y определяются как соответствующие координаты проекций этих точек на оси Ox и Oy.

7.3 Виды функций

Вид функции $y = f(x)$ определяется с учётом способа её задания. Например, если график функции является прямой линией, то функция называется *линейной*. В данном случае тип кривой, являющейся графиком некоторой функции, обуславливает и её название. Так, различаются эллипитические, гиперболические и параболические кривые. Если функция задаётся с помощью формулы, содержащей алгебраическое выражение с переменными в различных степенях, то такие функции называются *алгебраическими* порядка степени старшего слагаемого (монома). В случае алгоритмического задания тип алгоритма отражается в названии функции. Кроме того, различаются простые и сложные функции, явные и неявные, алгебраические и неалгебраические, элементарные и специальные и др.

В школьном курсе изучаются только элементарные функции, к которым относятся алгебраические функции различных порядков, тригонометрические и логарифмические функции, а также некоторые другие.

Но прежде всего рассматриваются линейные функции.

Линейные функции

Определение 58. Если график G_y функции $y = f(x)$ представляет собой прямую линию, то функция f называется *линейной* функцией.

Линейная функция, как и любая другая, может быть задана 4 способами: аналитически, графически, таблично и алгоритмически.

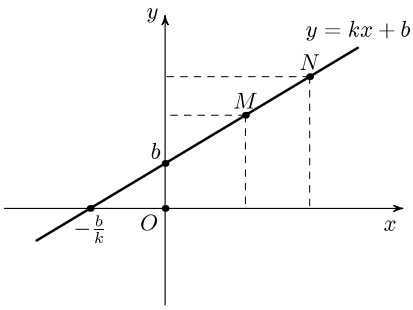


Рис. 7.2. Линейная функция

Наиболее простой способ задания линейной функции — табличный, так как требует задания всего двух точек (известно, что через 2 точки можно провести единственную прямую, то есть по этим двум точкам далее можно

с помощью несложных вычислений (некоторого алгоритма) вычислить значение функции в произвольной точке).

Графический способ также предполагает задание двух точек на плоскости, через которые будет проходить прямая — график линейной функции. Обычно задаются точки на координатных осях.

Аналитический способ задания линейной функции заключается в том, что зависимость между двумя переменными x и y выражается линейным уравнением, которое содержит переменные x и y в степени не выше первой (что означает, что или переменная присутствует в первой степени, или отсутствует вовсе). Различают два вида линейных уравнений общего вида.

— Явное задание функции — уравнение вида $y = kx + b$, где k, b — параметры: параметр k отвечает за угол наклона прямой, параметр b — за сдвиг прямой относительно начала координат.

— Неявное задание функции — уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где A, B, C — параметры.

Пользуясь правилами преобразования равенств, можно перейти от явного задания функции к неявному, и наоборот:

$$y = kx + b \Rightarrow kx - y + b = 0;$$

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

(если в последнем случае $B = 0$, то переменная y явно не выражается, и функция, вообще говоря, не задана, так как одному значению x соответсвует бесконечно много значений y, для которых выполнено равенство $Ax = -C$).

Рассмотрим уравнение $y = kx + b$. Это один из 6 видов логических соотношений — равенство, объединяющее 4 величины: переменные x и y и параметры k и b. Пользуясь методами преобразования равенств, каждая из 4 величин может быть выражена через другие 3. Соответственно, различаются 3 типа задач.

1) Определение значения функции y_0 при заданном значении аргумента x_0 и известных значениях параметров.

2) Определение значения аргумента по заданному значению функции при известных параметрах (обратная задача).

3) Определение значения одного из параметров при известных значениях аргумента, функции и второго параметра.

Каждый из этих типов задач может быть проинтерпретирован геометрически. Например, в одном из случаев третьего пункта, задача может быть поставлена следующим образом. Требуется определить значение параметра k — углового коэффициента прямой — при котором прямая проходит через заданную точку (x_0, y_0) и пересекает ось ординат в точке с координатой b.

Область определения и область значений линейной функции. Линейное уравнение $y = kx + b$ содержит операции умножения и сложения, которые могут быть выполнены над любыми числами от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, областью определения функции, а также её параметров является вся числовая ось. Если можно выразить x через y ($k \neq 0$), то можно заметить, что область значения функции представляет собой всю числовую прямую.

На числовой оси при рассмотрении любой из 4 величин x, y, k или b целесообразно выделить следующие особые точки и интервалы: -1, 0, 1; $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, $(-1, 0)$ и $(0, 1)$, $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$.

7.4 Характеристика особых точек и интервалов изменения аргумента

Особая точка $x = 0$. Это начало отсчёта на оси абсцисс; граница между положительными и отрицательными значениями аргумента x; центр симметрии для любой пары взаимно противоположных чисел; единственно число, которое имеет противоположным само себя ($0 = +0 = -0$) и не имеет обратной величины (выражение $1 : 0$ не имеет смысла); нейтральное слагаемое (от прибавления нуля к некоторому числу, то число не изменится).

Кроме того, известно, что все точки на оси ординат имеют абсциссу, равную нулю, и ординату в диапазон от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому равенство $x = 0$ можно рассматривать как линейное уравнение оси Oy.

Особая точка $x = 1$. Это масштабная единица для оси абсцисс, граница между взаимно обратными положительными числами, нейтральный множитель в произведении (от умножения некоторого числа на 1, оно не измееяется); числитель обратной величины ($1/n$), единственное положительное число, которое имеет своим обратным само себя ($1/1 = 1$); числитель единичной дроби (целое делится на равные части); центр вращения (или неподвижная точка) при отображении луча $[1, +\infty)$ на полуинтервал $(0, 1]$ и наоборот.

Особая точка $x = -1$. Это масштабная единица для отрицательной координатной полуоси; граница между взаимно обратными отрицательными числами; единственное отрицательное число, которое имеет своим обратным числом само себя; множитель-«мигалка» (при умножении числа на -1 знак числа меняется на противоположный, а при повторном умножении восстанавливается прежний, т. е. знак «мигает»). Равенство $x = -1$ есть уравнение прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $(-1, 0)$.

Интервал $(0,1)$. Это интервал правильных положительных дробных чисел; это множители-«уменьшители» (при умножении числа α на число $x \in (0,1)$ абсолютная величина $|\alpha|$ уменьшается, а при многократном умножении стремится к нулю: $|\alpha| \cdot x^n \to 0$ при $n \to \infty$).

Интервал $[1,+\infty)$. Этот интервал содержит целые положительные (натуральные) числа, смешанные обыкновенные дроби (рациональные числа большие единицы). Число $x \in (1,\infty)$ — это множитель-«увеличитель», поскольку при умножении произвольного числа a на $x \in (1,+\infty)$ абсолютная величина числа $|a|$ увеличивается. При многократном увеличении на x произведение $|a|x^n$ стремится к бесконечности.

Интервал $(-1,0)$. Этот интервал содержит правильные отрицательные обыкновенные дроби. Число $x \in (-1,0)$ это множитель «мигалка» и «уменьшитель» одновременно.

Интервал $(-\infty,-1]$. Этот интервал содержит целые отрицательные числа, отрицательные смешанные обыкновенные дроби. Число $x \in (-\infty,-1)$ — это множитель «мигалка» и «увеличитель» одновременно: при многократном умножении на x произвольного числа модуль произведения $|ax^n|$ стремится к бесконечности.

Интервал $(0,+\infty)$ содержит положительные числа, образующие положительную координатную полуось, или абсолютная величина которых совпадает с самим числом: $|x| = x$. Над этими числами можно выполнять любые математические операции.

Интервал $(-\infty,0)$ содержит отрицательные числа, образующие отрицательную полуось. Их абсолютная величина совпадает с противоположным числом: $|x| = -x$. Из этих чисел в рамках элементарной математики нельзя извлекать корни чётной степени, а также нельзя брать от них логарифмы или брать их в качестве основания логарифмов.

Отрезок $[-1,+1]$ в рамках некоторых теорий можно принять в качестве стандартного. Любой другой отрезок $[c,d]$ числовой оси сводится к отрезку $[-1,+1]$ преобразованиями сдвига и растяжения / сжатия. При этом $c \mapsto -1$, $d \mapsto 1$, $\frac{1}{2}(c+d) \mapsto 0$.

7.5 Свободный член в линейном уравнении

В линейном уравнении вида $y = kx + b$ параметр b называется *свободным членом* (не умножается (*свободен*) ни на какую переменную).

Параметр b участвует только в операции сложения, а складывать можно любые числа, следовательно он может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, рассматриваются те же особые точки и интервалы изменения параметра b, что и в случае переменной x.

Выявим содержательный смысл свободного члена b линейного уравнения (см. рис. 7.2).

Пусть $x = 0$. Тогда $y = k \cdot 0 + b = b$, что означает, что график линейной функции пересекает ось ординат в точке на расстоянии $|b|$ от начала координат.

Пусть $y = 0$. Тогда из равенства $0 = kx + b$ имеет $x = -\frac{b}{k}$, что означает, что длина отрезка, отсекаемого на оси абсцисс прямой — графиком функции $y = kx + b$ пропорциональна $|b|$.

Рассмотрим особые точки и интервалы изменения параметра b на числовой оси.

Пусть $b = 0$. Тогда исходное уравнение принимает вид $y = kx$. Такое уравнение называется уравнением прямопропорциональной зависимости. График функции $y(x) = kx$ проходит через начало координат. При изменении параметра k от $-\infty$ до $+\infty$ получим множество всех прямых (пучок прямых), проходящих через начало координат.

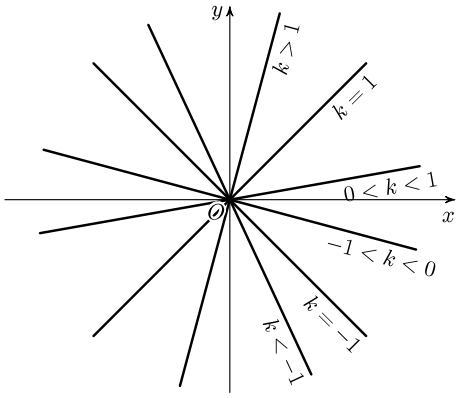


Рис. 7.3. Пучок прямых, проходящих через начало координат

7.6 Угловой коэффициент в линейном уравнении

В линейном уравнении вида $y = kx + b$ или, в частном случае, при $b = 0$, уравнении вида $y = kx$ параметр k (коэффициент пропорциональности) также называется *угловым коэффициентом*, потому что от его значения зависит положение прямой относительно координатных осей Ox и Oy, а точнее угол, под которым прпямая $y = kx + b$ пересекает ось абсцисс.

Параметр k участвует только в операции умножения, а умножить можно на любое число, следовательно, параметр k может принимаеть любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, рассматриваются те же особые точки и интервалы изменения параметра k, что и в случае переменной x.

Рассмотрим особые значения параметра k.

Пусть $k = 0$ (нулевой угловой коэффициент). В этом случае уравнение принимает вид $y = b$, равенство переменной y числу b справедливо для всех значений $x \in (-\infty, +\infty)$. При $b = 0$ равенство $y = 0$ можно рассматривать как уравнение оси абсцисс.

Пусть $k = 1$ (единичный уголовой коэффициент). Если уравнение имело вид $y = kx$, то при $k = 1$ имеет место равенство $y = x$, т. е. точки прямой имеют одинаковые координаты, отстоят от осей координат на равное расстояние, т. е. прямая $y = x$ есть биссектриса I и III четвертей.

Пусть $k = -1$ (отрицательный единичный уголовой коэффициент). Тогда уравнение $y = kx$ записывается в виде $y = -x$. Это уравнение биссектрисы II и IV координатных четвертей.

Если $0 < k < 1$**,** то при увеличении k от 0 до 1 прямая $y = kx$, вращаясь вокруг начала координат отрывается от оси абсцисс и приближается к биссектрисе I и III четвертей, вплоть до совпадения с ней. Вращение происходит против часовой стрелки.

Если $1 < k < \infty$**,** то при увеличении k, прямая $y = kx$, вращаясь вокруг точки $(0, 0)$, отрывается от биссектрисы I и III четвертей и бесконечно приближается к оси ординат. Вращение происходит против часовой стрелки.

Если $-1 < k < 0$**,** то при уменьшении k прямая $y = kx$, вращаясь вокруг начала координат отрывается от оси абсцисс и приближается к биссектрисе II и IV четвертей, вплоть до совпадения с ней. Вращение происходит по часовой стрелке.

Если $-\infty < k < -1$**,** то при уменьшении k, прямая $y = kx$, вращаясь вокруг точки $(0, 0)$, отрывается от биссектрисы II и IV четвертей и бесконечно приближается к оси ординат. Вращение также происходит по часовой стрелке.

Общий вывод. Если $|k| \to 0$, то прямая $y = kx$ прижимается к оси Ox. Угол наклона стремится при этом к 0 или $180°$.

Если $|k| \to \infty$, то прямая $y = kx$ прижимается к оси ординат. Угол наклона стремится к $90°$ (стремится к $90°$ справа (т. е. уменьшается к $90°$), если $k < 0$ и слева (т. е. увеличивается до $90°$), если $k > 0$).

Примечание. Как уже было сказано, уравнение оси ординат имеет вид $x = 0$; в этом случае условно $k = \pm\infty$.

7.7 Параллельный перенос прямой вдоль оси ординат и оси абсцисс

В линейном уравнении $y = kx + b$ полагаем, что $b \neq 0$. Если $k = 0$, то исходное уравнение принимает вид $y = b$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и задаёт

прямую, параллельную оси абсцисс, отстоящую от неё на расстояние $|b|$ (эта прямая лежит выше оси абсцисс при $b > 0$ и ниже при $b < 0$).

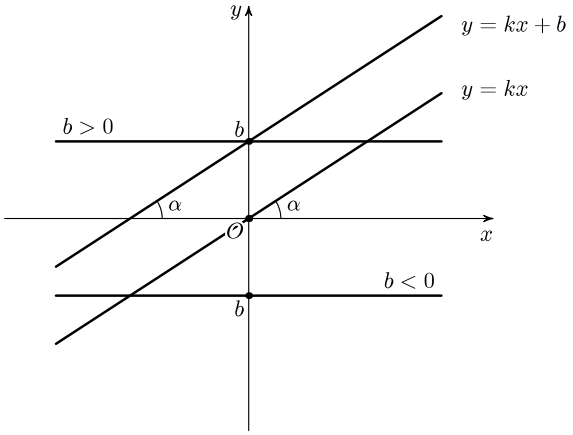


Рис. 7.4. Параллельный перенос

Если угловой коэффициент k отличен от нуля, то отличен от нуля и угол наклона α прямой к оси абсцисс. Этот угол не зависит от параметра b. Поэтому все прямые, задаваемые линейными уравнениями с одинаковым значением параметра k имеют одинаковый угол наклона α к оси абсцисс, следовательно, они параллельны.

При $k \neq 0$, $b \neq 0$ линейное уравнение $y = kx + b$ можно рассматривать как сумму двух линейных уравнений $y = y_1 + y_2$, где $y_1 = kx$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат, а $y_2 = b$ — уравнение прямой, параллельной оси абсцисс Ox. Итак, прямая $y = kx + b$ есть «сумма» двух прямых $y_1 = kx$ и $y_2 = b$; прямая y параллельна прямой y_1 (у них одинаковый угловой коэффициент k).

Добавление параметра b равносильно тому, что ординаты всех точек, принадлежащих прямой $y_1 = kx$, увеличиваются на константу b. Таким образом прямая y_1 сдвигается вдоль оси ординат Oy на отрезок длины $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$. Это и есть преобразование прямой, имеющее название *параллельный перенос вдоль оси ординат*.

Пример № 107. Прямая $y = x + 1$ есть биссектриса I четверти, сдвинутая вдоль оси ординат вверх на 1. Прямая $y = x - 1$ есть та же биссектриса, но сдвинутая вниз на единицу.

При параллельном переносе прямой $y_1 = kx$ вдоль оси ординат, происходит сдвиг точки пересечения прямой с осью абсцисс на отрезок $-\frac{b}{k}$ (величина сдвига определяется из равенства $0 = kx_0 + b$, откуда $x_0 = -\frac{b}{k}$). Таким образом, сдвиг прямой вдоль оси ординат на b (вверх или вниз в зависимости от знака b) равносилен сдвигу этой же прямой вдоль оси абсцисс на отрезок длины $\left|\frac{b}{k}\right|$ влево, если $\frac{b}{k} > 0$ и вправо, если $\frac{b}{k} < 0$.

Глава 8

Основная теорема арифметики. НОД и НОК. Делимость

8.1 Кратность чисел

Определение 59. Сумма одинаковых слагаемых называется *произведением* двух чисел: *слагаемого* m и *коэффициента кратности* k (числа повторных сложений). Произведение кратко записывается так: $n = m \cdot k$. Числа m и k называются *сомножителями* числа n. В то же время, число n называется числом, кратным числу m с коэффициентом k, или кратным числу k с коэффициентом m. Другими словами, число n кратно своим сомножителям m и k и записывается в форме «суммы одинаковых слагаемых», равных m и k:

$$\underbrace{m + m + \cdots + m}_{k \text{ раз}} = n$$

или

$$\underbrace{k + k + \cdots + k}_{m \text{ раз}} = n.$$

Такая запись произведения $m \cdot k$ называется *развёрткой* и, наоборот, краткая запись суммы одинаковых слагаемых в виде произведения $m \cdot k$ называется *свёрткой*. Нахождение произведения двух и большего числа сомножителей называется *операцией умножения*.

Задача № 228. Напишите десять чисел, кратных 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Деление — операция, обратная умножению, т. е. действие, позволяющее находить по данному произведению n и одному из сомножителей k другой сомножитель m. Операция деления записывается так:

$$n : k = n/k = m \quad \text{или} \quad n : m = n/m = k.$$

Из этих равенств следует другое равенство:

$$n = m \cdot k = k \cdot m.$$

Компоненты операции деления имеют следующие названия: n — *делимое*, k — *делитель*, m — *частное* (или m — *делитель*, k — *частное*).

Задача № 229. Вычислите:

1) 8 339 915 : 235
2) 121 932 631 112 635 269 : 123 456 789
3) 1 482 075 477 630 : 6666
4) 1 111 088 889 : 99 999
5) 33 512 972 : 13 579

Определение 60. Если при делении целого числа n на целое число m в частном получается целое число k, то говорят, что «n делится на m нацело (без остатка, точно)». Свойство числа n делиться нацело на m называется *делимостью* и символически записывается так:

$$n \vdots m \quad \text{— читается «}n\text{ делится на }m\text{».}$$

Другими словами, целое число кратно каждому сомножителю или каждому своему делителю.

Поскольку каждое натуральное число n есть сумма n единиц, то можно записать $n = 1 \cdot n$, т. е. каждое натуральное число имеет своим делителем единицу и самого себя. Далее, поскольку единица есть наименьшее натуральное число, то 1 является наименьшим делителем любого натурального числа n. Наибольшим делителем числа n является само число n.

Пусть натуральное число n имеет t различных (несовпадающих друг с другом) делителей. Множество этих делителей обозначают $\mathcal{D}_{n,t}$ и кратко записывают так:

$$\mathcal{D}_{n,t} = \{n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots,\ n_t\},$$

где

$$\begin{cases} n_1 = 1 \quad \text{— наименьший делитель;} \\ n_t = n \quad \text{— наибольший делитель (само число);} \\ 1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_{t-1} < n_t = n \quad \text{— делители упорядочены;} \\ n \vdots n_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ t. \end{cases}$$

Пример № 108. Пусть $n = 10$. Будем делить на числа с возрастающим значением начиная с 2. Тогда запись «столбиком» имеет следующий вид:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Получили все делители числа 10. Среди делителей нет повторяющихся, чтобы получить исходное число 10 надо перемножить получившиеся делители, получим $10 = 2 \cdot 5$. Обратите внимание, что делители упорядочены, т. е. сначала идет 2, затем по возрастанию — 5.

Пример № 109. Пусть $n = 24$. Будем делить на числа с возрастающим значением, но если получившееся число делится на тоже делитель, то делим на него еще раз. Тогда запись «столбиком» имеет следующий вид:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Получили все делители числа 24. Но среди делителей есть повторяющиеся (2), их надо перемножить, получим: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$ Обратите внимание, что делители упорядочены, т. е. сначала идет 2, затем 3.

Задача № 230. У следующих натуральных чисел найдите все различные (несовпадающие друг с другом) делители.

1) 6	3) 9	5) 12	7) 16	9) 20	11) 224
2) 8	4) 10	6) 14	8) 18	10) 45	12) 1012

Простые и составные числа.

Определение 61. Если натуральное число, большее единицы ($n > 1$), не имеет других делителей, кроме 1 и самого себя, то оно называется *простым числом*. Простое число p разлагается в сумму одинаковых слагаемых единственным образом:

$$p = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p \text{ раз}}.$$

Простых чисел существует бесконечно много (Евклид). Единица не относится к простым числам. Она — особое число (наименьший делитель совпадает с наибольшим, т. е. с самим числом). Поэтому последовательность простых чисел начинается с 2 и имеет вид: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Задача № 231. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Определение 62. Натуральное число n, отличное от единицы ($n > 1$) и не являющееся простым, называется *составным*. Таким образом, составное число n имеет по крайней мере 3 делителя: наименьший (единица), наибольший (само число n) и промежуточные (n_2, n_3), причём $1 < n_2 \leqslant n_3 < n$.

Составное число n разлагается в сумму одинаковых слагаемых не единственным образом, а несколькими способами. Например, $n = 6 = 2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2 = 3 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Делителями составного числа n могут быть как простые, так и составные числа. Делители, меньшие самого числа, называются *собственными* (или

правильными). Например, число $n = 12$ имеет 6 делителей, в том числе: 1, 2, 3, 4, 6, 12, т. е. $t = 6$. Собственные делители: 1, 2, 3, 4, 6.

Формирование множества делителей числа n удобно начинать с выявления простых делителей, а именно, осуществляется последовательная проверка на делимость исходного числа n на простые числа в порядке их возрастания: 2, 3, 5... При этом используется, так называемая, схема деления «столбиком» (левый столбик содержит только частные от деления на простые числа, а правый — простые делители).

Пример № 110. Пусть $n = 48$. Запись «столбиком» имеет следующий вид:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Итак, число 48 содержит 2 простых делителя: 2, 3, из них: делитель 2 появляется 4 раза (имеет кратность или повторяемость, равную 4); делитель 3 имеет кратность 1.

Пример № 111. Пусть $n = 27\,720$. Запись «столбиком» имеет следующий вид:

$$\begin{array}{r|l} 27720 & 2 \\ 13860 & 2 \\ 6930 & 2 \\ 3465 & 3 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Итак, число 27720 содержит 5 простых делителей: 2, 3, 5, 7, 11, из них: делитель 2 появляется 3 раза (имеет кратность или повторяемость, равную 3); делитель 3 имеет кратность 2; остальные делители — 5, 7, 11 — имеют кратность 1.

Исходное число n записывается в виде произведения

$$n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,$$

которое называется *каноническим* (или стандартным) *разложением числа n на простые делители* с указанием их кратности. Число элементов, содержащихся в полном множестве различных делителей $\mathcal{D}_n$ (включая 1 и само

число n), вычисляется как произведение кратностей простых делителей, увеличенных на 1, в каноническом разложении числа. Для числа $n = 27\,720$ имеем $\mathcal{D}_{n,t}$ с числом элементов (делителей) $t = (3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\times$ $\times(1+1)\cdot(1+1) = 96$. При $n = 12 = 2^2\cdot 3$ имеем $t = (2+1)(1+1) = 6$.

Задача № 232. Вычислить количество делителей чисел 120 и 134.

Задача № 233. Выпишите все собственные делители чисел 60 и 96.

Задача № 234. Выпишите все собственные делители чисел 28, 36, 92, 56, 84, 124, 9369.

Задача № 235. Выпишите собственные делители чисел 238, 396, 792, 456, 874, 1248, 369 369.

8.2 Основная теорема арифметики

Теорема 8.2.1. *Любое натуральное число $n > 1$, имеет единственное разложение на простые множители с учётом их кратности, т. е. представляется в виде канонического разложения (произведения)*

$$n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s},$$

где s — число различных простых делителей числа n, отличных друг от друга и от единицы; p_1, p_2, p_3, $\ldots$, p_s — простые числа (делители числа n), причём ради определённости полагаем, что они упорядочены:

$$1 < p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_s;$$

k_1, $\ldots$, k_s — показатели степени простых делителей p_i ($i = 1, \ldots, s$), т. е. имеет место равенство

$$p_i^{k_i} = \underbrace{p_i\cdot p_i\cdot p_i\cdot\cdots\cdot p_i}_{k_i\ \text{раз}}$$

Примечание. Любое целое число n такое, что $|n| > 1$, имеет такое же представление, быть может, с дополнительным множителем -1.

Число k_i называется кратностью простого делителя p_i ($i = 1, \ldots, s$).

Множество $\mathcal{D}_{n,t}$ всех делителей числа n содержит t элементов, т. е. делителей:

$$t = (k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)\ldots(k_s+1)$$

Пример № 112. Пусть $n = 27\,720$. Имеем каноническое разложение этого числа: $n = 27\,720 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 = 2^3\cdot3^2\cdot5^1\cdot7^1\cdot11^1$. Следовательно, $s = 5$; $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $n_4 = 7$, $n_5 = 11$; $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = k_4 = k_5 = 1$; $t = (3+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 96$ — количество всех делителей.

Попробуйте написать самостоятельно примеры канонического разложения факториалов от 1! до 50!.

Полное множество $\mathcal{D}_{n,t}$ простых и составных делителей числа n формируется по следующей схеме.

1) Выписываем «столбиком» различные степени простых делителей:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_i & \dots & p_s \\
p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & \dots & p_i^2 & \dots & p_s^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
p_1^{k_1} & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 & p_2^{k_2} & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & p_3^{k_3} & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & p_i^{k_i} & &
\end{array}$$

Число элементов в каждом из столбцов равно кратности соответствующего простого делителя плюс единица, т. е. k_1+1, k_2+1, ..., k_s+1.

2) Чтобы получить произвольный делитель числа n необходимо выбрать по одному элементу из каждого столбца и перемножить их. Легко подсчитать чисто t таких произведений, составленных по принципу «каждый с каждым»:

$$t = (k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)\dots(k_s+1).$$

3) Практическую схему выбора сомножителей можно представить в виде рисунка, на котором точки заменяют элементы таблицы. Рассмотрим пример $s=4$; $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=3$, $k_4=2$.

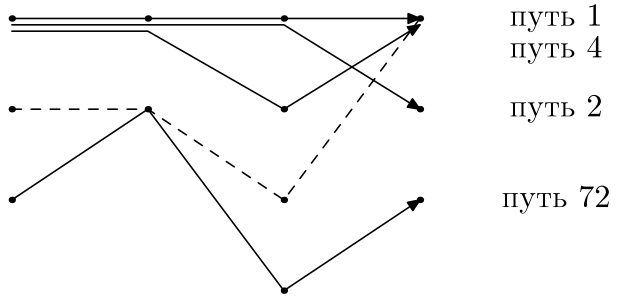


Рис. 8.1

Выбор элементов (сомножителей) по одному из каждого столбца является ломаной линией, проходящей через определённый набор точек (маршрут путешествия).

Задача № 236. Разложите на простые множители:

1) 62	3) 256	5) 32	7) 1001	9) 89
2) 318	4) 1024	6) 728	8) 121	10) 23

Задача № 237. Разложите на простые множители:

1) 236	3) 452	5) 2348	7) 5648	9) 2 468 864
2) 348	4) 1064	6) 21 217	8) 73 377	10) 11 111

Задача № 238. Разложите на простые сомножители число 2 520. Сколько различных делителей оно имеет? Перечислите их.

Задача № 239. Найдите минимальное число, которое делится на числа от 1 до 20 без остатка.

Совершенные числа. Рассмотрим сумму S всех отличных друг от друга простых и составных делителей некоторого составного числа n, за исключением самого числа n, т. е. сумму $t-1$ слагаемых. Если $S_n = n$ (сумма делителей равна исходному числу), то такое число называется *совершенным* числом.

Известно всего 20 совершенных чисел, в том числе:

n	разложение	$\mathcal{D}_{n,t} \setminus \{n\}$	S_n
6	$2 \cdot 3$	$\{1, 2, 3\}$	6
28	$2^2 \cdot 7$	$\{1, 2, 4, 7, 14\}$	28
496	$2^4 \cdot 31$	$\{1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248\}$	496

8.3 Делимость чисел. Девять простых свойств.

Число n делится на число m нацело (без остатка, точно), если существует целое число k, которое при умножении на m сравнивается с n, т. е. $m \cdot k = n$.

Делимость числа n на число m символически записывается с помощью специального знака делимости — « $\vdots$ » — «троеточия». «$n \vdots m$» читается как «эн делится на эм» или «эн кратно эм». Например, число 4 делится на число 2, другими словами 4 кратно 2, а 2 является делителем числа 4. В общем случае *число кратно своему делителю*.

Простейшие свойства делимости.

1) Любое число n делится на единицу: $n \vdots 1$ (в результате деления получается исходное число n), если же $1 \vdots n$, то $n = 1$ или $n = -1$. Итак,

$$n \vdots 1 \Rightarrow n = 1 \cdot n$$

$$1 \vdots n \Rightarrow n = 1 \text{ или } n = -1$$

2) *Нуль* делится на любое число n ($0 \vdots n$), если $n \neq 0$.
3) Для любого числа n существует другое натуральное число m, кратное исходному: $m \vdots n$ (m делится на n).
4) *Рефлексивность* (возвратность) делимости: «всякое натуральное число делится на себя: $n \vdots n$».

   Пример № 113. $1 \vdots 1,\ 7 \vdots 7$, поскольку числа 1 и 7 представимы в виде: $1 = 1 \cdot 1,\ 7 = 7 \cdot 1$
5) *Транзитивность* (переходность) делимости: «если одно натуральное число делится на другое, которое, в свою очередь, делится на третье, то первое делится на третье»:

$$n \vdots m,\ m \vdots l \Rightarrow n \vdots l.$$

   Пример № 114. Число 18 делится на 6, так как 18 представимо в виде $18 = 6 \cdot 3$, 6 делится на 2, так как $6 = 2 \cdot 3$. Подставим выражение для 6 в представление числа 18, получим $18 = (2 \cdot 3) \cdot 3 = 2 \cdot 9$, то есть $18 \vdots 2$.

   В общем случае если $n \vdots m,\ m \vdots l$, то для некоторых целых k_1, k_2 выполнено $n = m \cdot k_1,\ m = l \cdot k_2$. Подставим второе равенство в первое: $n = (l \cdot k_2) \cdot k_1 = l \cdot (k_2 \cdot k_1)$. Значит, $n \vdots l$.
6) *Антисимметричность* делимость положительных и отрицательных чисел (алгебра): «если два неизвестных числа x и y делятся друг на друга, то они равны или противоположны»:

$$\begin{cases} x \vdots y \\ y \vdots x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right.$$

   Если $x \vdots y, y \vdots x$, то существуют такие целые числа k_1, k_2, что $x = y \cdot k_1,\ y = x \cdot k_2$. Подставим второе равенство в первое: $x = x \cdot (k_1 \cdot k_2)$. Так как $x \neq 0$ (на 0 делить нельзя), то $k_1 \cdot k_2 = 1 \Rightarrow\ k_1, k_2$ целые взаимно обратные числа, а такими могут быть только 1 или -1. Поэтому $x = y$ или $x = -y$.

   Пример № 115. Если $60 \vdots a,\ a \vdots 60$, то $a = 60$ или $a = -60$.
7) *Принцип нуля* в теории делимости: «если x делится на y, но $|y| > |x|$, то $x = 0$»:

$$\begin{cases} x \vdots y \\ |y| > |x| \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

или

$$\begin{cases} x \vdots y \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow |x| \geqslant |y|$$

Пример № 116. Если для неотрицательного целого числа a справедливо, что $(a-6) \vdots a$, то $a = 1, 2, 3$ или 6, так как если $a > 6$, то $|a| = a > a - 6 = |a-6| \Rightarrow \ a - 6 = 0$, что противоречит условию $a > 6$. Перебором чисел от 1 до 6 получаем, что требуемому условию удовлетворяют только числа 1, 2, 3 и 6.

8) Эквивалентность делимости по *модулю*:

$$x \vdots y \Leftrightarrow |x| \vdots |y|,$$

т. е. достаточно определять делимость положительных чисел, а потом рассматривать каждый из делителей со знаками «+» или «−».

Пример № 117. Если $x \vdots -6$, то $x \vdots 6$ и $|x| \vdots 6$.

9) *Делимость суммы*: «если слагаемые делятся на натуральное число m, то и их сумма делится на m»:

$$n_1 \vdots m,\ n_2 \vdots m,\ n_3 \vdots m, \ldots,\ n_k \vdots m \Rightarrow (n_1 + \cdots + n_k) \vdots m.$$

«Если сумма двух чисел и одно из слагаемых делится на натуральное число m, то и другое слагаемое делится на m»:

$$\begin{cases} (x+y) \vdots m \\ x \vdots m \end{cases} \Rightarrow y \vdots m$$

Пример № 118. Если $(x+10) \vdots 5$, то и $x \vdots 5$, так как $10 \vdots 5$.

Задача № 240. Пусть $x \vdots x^2$, где $x \neq 0$. Чему может быть равен x?

Задача № 241. Пусть $(2a+3b) \vdots 6$. Может ли a быть равно 11? Может ли b быть равно 4?

8.4 Сравнение множества делителей одного натурального числа с множеством делителей другого натурального числа.

Пример № 119. Мы уже знаем, что составное число можно представить как произведение простых чисел (его делителей). У любого составного числа есть делители, например: $6 = 2 \cdot 3$, где 2 и 3 простые числа (делители) числа

6. $9 = 3 \cdot 3$, где 3 и 3 простые числа (делители) числа 9. Если мы хотим найти общий делитель двух чисел, в этом примере: 6 и 9, то необходимо разложить их на простые множители (найти их делители) и сравнив множители найти одинаковые числа. У 6 и 9 среди простых множителей есть число 3 являющееся общим делителем, общим – значит на этот делитель делится и 6 и 9. Среди всех делителей чисел 6 и 9 нет больше общих делителей, значит число 3 и есть общий делитель.

Еще похожий пример: Возьмем два числа: 30 и 210. Если мы хотим найти их общий делитель, то необходимо разложить их на простые множители (найти их делители) и сравнив множители, найти одинаковые делители. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, где 2, 3 и 5 простые числа (делители) числа 30. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, где 2, 3, 5 и 7 простые числа (делители) числа 210. У 30 и 210 среди простых множителей есть числа $2, 3, 5$ являющиеся общими делителями этих чисел, общим – значит на эти делители делятся и 30 и 210. Среди всех простых делителей чисел 30 и 210 нет больше общих простых делителей, значит числа $2, 3, 5$, а также их всевозможные произведения, то есть $6, 10, 15, 30$, и есть общие делители. Но, обратите внимание, среди общих делителей $2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ есть наибольший – число 30 – он то и есть наибольший общий делитель этих двух чисел, кратко обозначаемый: НОД$(30, 210) =$ $=$ НОД(a, b), где $a = 30$, $b = 210$.

НОД(a, b) – самое большое натуральное число, на которое одновременно делятся a и b.

Пусть заданы два различных натуральных числа n и m, которые имеют канонические разложения

$$n = n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot n_u^{k_u} \text{ и } m = m_1^{l_1} \cdot m_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot m_v^{l_v},$$

где n_1, n_2, ..., n_u — различные простые делители числа n с кратностями k_1, k_2, ..., k_u; u — число простых делителей n, а m_1, m_2, ..., m_u — различные простые делители числа m с кратностями l_1, l_2, ..., l_v; v — число простых делителей m.

Если некоторое натуральное число d одновременно является делителем обоих чисел n и m, то оно называется общим делителем и обозначается кратко так: $d(n, m)$ (читается «дэ — общий делитель эн и эм»). Единица — всегда общий делитель.

Среди общих делителей имеется наибольший. Он не превосходит чисел n и m, называется *наибольшим общим делителем*, обозначается так: НОД(n, m).

Пример № 120. Пусть $n = 12$, $m = 18$. Имеем их канонические разложения в виде делителей: $n = 12 = 1, 2, 3, 4, 6, 12$. $m = 18 = 1, 2, 3, 6, 9, 18$. Общие

делители чисел 12 и 18: 1, 2, 3, 6. Наибольший из общих делителей — 6. Значит, НОД$(12, 18) = 6$

Пример № 121. Пусть $n = 15$, $m = 18$. Имеем их канонические разложения: $n = 3 \cdot 5$; $m = 2 \cdot 3^2$. У них имеется единственный общий делитель, отличный от 1: $d(15, 18) = 3$, он же и наибольший: НОД$(15, 18) = 3$.

Схема нахождения НОД(a, b).

1) Разложить a и b на простые множители, используя канонические разложения в виде делителей.
2) Подчеркнуть в тетради общие множители этих разложений.
3) Перемножить все подчеркнутые множители одного из чисел.

Примечание. Схема подходит для нахождения НОД трех и более чисел. НОД(a, b, c); НОД(a, b, c, d) и т. д.

Задача № 242. Найдите наибольший общий делитель (НОД) следующих чисел:

1) НОД$(4, 6)$	7) НОД$(2, 18)$	13) НОД$(8, 48)$	19) НОД$(11, 132)$
2) НОД$(4, 8)$	8) НОД$(2, 48)$	14) НОД$(9, 18)$	20) НОД$(11, 264)$
3) НОД$(3, 6)$	9) НОД$(6, 18)$	15) НОД$(9, 45)$	21) НОД$(12, 18)$
4) НОД$(3, 9)$	10) НОД$(6, 48)$	16) НОД$(10, 180)$	22) НОД$(12, 48)$
5) НОД$(5, 15)$	11) НОД$(7, 14)$	17) НОД$(10, 188)$	23) НОД$(12, 64)$
6) НОД$(5, 45)$	12) НОД$(8, 18)$	18) НОД$(10, 218)$	24) НОД$(12, 128)$

Задача № 243. Найдите наибольший общий делитель НОД следующих чисел:

1) НОД$(13, 11)$	9) НОД$(36, 48)$	17) НОД$(320, 188)$
2) НОД$(7, 13)$	10) НОД$(12, 18)$	18) НОД$(640, 960)$
3) НОД$(13, 27)$	11) НОД$(50, 145)$	19) НОД$(7920, 594)$
4) НОД$(18, 60)$	12) НОД$(25, 175)$	20) НОД$(35, 40)$
5) НОД$(16, 240)$	13) НОД$(675, 825)$	21) НОД$(231, 18)$
6) НОД$(72, 96)$	14) НОД$(324, 111)$	22) НОД$(568, 48)$
7) НОД$(35, 88)$	15) НОД$(324, 432)$	23) НОД$(1255, 65)$
8) НОД$(24, 35)$	16) НОД$(348, 842)$	24) НОД$(6730, 1375)$

Задача № 244. Найдите наибольший общий делитель двух чисел:

1) НОД$(210, 330)$	3) НОД$(2431, 770)$	5) НОД$(111, 1111)$
2) НОД$(154, 182)$	4) НОД$(21, 770)$	6) НОД$(78, 124)$

Задача № 245. Найдите наибольший общий делитель трех чисел:

1) НОД$(210, 330, 36)$
2) НОД$(154, 182, 343)$
3) НОД$(2431, 770, 121)$
4) НОД$(21, 770, 91)$
5) НОД$(111, 1111, 121)$
6) НОД$(78, 124, 220)$

Задача № 246. Являются ли числа 102, 117, 221 взаимно простыми попарно и в совокупности?

Определение 63. Если два числа n и m не имеют общих делителей, кроме 1, то такие числа называются *взаимно простыми* (НОД(m, n)=1). Например, если $n = 15$, $m = 26$, то НОД$(n, m) = 1$.

Определение 64. Если натуральное число l делится на каждое из чисел n и m, то оно называется *общим кратным* (ОК) этих чисел. *Наименьшее общее кратное* обозначается НОК(n, m).

Схема нахождения НОК(a, b).

1) Разложить a и b на простые множители, используя канонические разложения в виде делителей.
2) Подчеркнуть в тетради общие множители этих разложений.
3) Умножить число a на подчеркнутые множители числа b.

Примечание. Схема подходит для нахождения НОК трех и более чисел. НОК(a, b, c); НОК(a, b, c, d) и т. д.

Задача № 247. Найдите наименьшее общее кратное НОК(a, b) чисел:

1) НОК$(3, 2)$
2) НОК$(4, 6)$
3) НОК$(12, 8)$
4) НОК$(3, 60)$
5) НОК$(16, 32)$
6) НОК$(72, 96)$
7) НОК$(35, 125)$
8) НОК$(24, 64)$
9) НОК$(36, 48)$
10) НОК$(12, 18)$
11) НОК$(50, 145)$
12) НОК$(72, 60)$
13) НОК$(6, 45)$
14) НОК$(18, 78)$
15) НОК$(40, 150)$
16) НОК$(30, 122)$
17) НОК$(32, 188)$
18) НОК$(60, 90)$
19) НОК$(720, 594)$
20) НОК$(35, 45)$
21) НОК$(236, 184)$
22) НОК$(56, 48)$
23) НОК$(125, 65)$
24) НОК$(630, 1375)$

Задача № 248. Найдите наименьшее общее кратное НОК(a, b) чисел:

1) НОК$(12, 8)$
2) НОК$(14, 16)$
3) НОК$(18, 28)$
4) НОК$(32, 60)$
5) НОК$(16, 324)$
6) НОК$(172, 96)$
7) НОК$(350, 125)$
8) НОК$(246, 64)$
9) НОК$(136, 48)$
10) НОК$(128, 38)$
11) НОК$(50, 105)$
12) НОК$(72, 62)$
13) НОК$(68, 48)$
14) НОК$(18, 178)$
15) НОК$(40, 15)$
16) НОК$(30, 12)$
17) НОК$(32, 18)$
18) НОК$(60, 96)$
19) НОК$(72, 54)$
20) НОК$(35, 145)$
21) НОК$(369, 183)$
22) НОК$(156, 148)$
23) НОК$(125, 655)$
24) НОК$(630, 1230)$

Задача № 249. Найдите наименьшее общее кратное трех чисел:

1) НОК$(210, 330, 36)$
2) НОК$(154, 182, 343)$
3) НОК$(2431, 770, 121)$
4) НОК$(21, 770, 91)$
5) НОК$(111, 11, 121)$
6) НОК$(78, 124, 220)$

Для нахождения НОД и НОК используется схема деления «столбиком».

Пример № 122. Пусть $n = 27720$, $m = 84084$. Имеем:

$$n = 27720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11, \qquad m = 84084 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

Выпишем общие множители и перемножим их:

$$\text{НОД}(n, m) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 924.$$

Дополним меньшее из двух заданных чисел делителями 2-го числа, не вошедших в 1-ое, т. е.

$$\text{НОК}(n, m) = 27720 \cdot 7 \cdot 13 = 2\,522\,520.$$

Очевидно, что НОК(n, m) делится на n, m.

Примечания:

1) Если задана обыкновенная дробь a/b, то для её сокращения требуется найти НОД(a, b).
2) Если заданы 2 обыкновенные дроби a/b и c/d, то при их сложении (вычитании) требуется найти общий знаменатель, а именно НОК(b, d).
3) Используя канонические разложения нескольких натуральных чисел $(a, b, c, \ldots)$, можно найти НОД и НОК всех исходных чисел одновременно: НОД$(a, b, c, \ldots)$ и НОК$(a, b, c, \ldots)$.
   Если НОД$(a, b, c, \ldots) = 1$, то числа $a,\ b,\ c, \ldots$ взаимно простые по группе(или в совокупности), то некоторые пары из этих чисел могут иметь общие делители.

8.5 Свойства НОК и НОД двух натуральных чисел.

1) Каждое из чисел делится на свой делитель, в частности, каждое из двух чисел делится на наибольший общий делитель. $n \vdots$ НОД(n, m); $m \vdots$ НОД(n, m).
2) Наибольшее общее кратное двух чисел делится на каждое из этих чисел. НОК$(n, m) \vdots n$; НОК$(n, m) \vdots m$; НОК$(n, m) \vdots$ НОД(n, m).
3) Наибольшее общее кратное взаимно простых чисел равно произведению этих чисел. Если НОД$(n, m) = 1$, то НОК$(n, m) = n \cdot m$.

4) Общее кратное двух чисел делится на наименьшее общее кратное этих чисел. ОК$(n,m) \vdots$ НОК(n,m); если НОД$(n,m)=1$, то ОК$(n,m) \vdots (n\cdot m)$.
5) Любое целое число либо делится на простое, либо взаимно просто с этим простым числом. Если m — простое число, то для любого натурального числа n возможны 2 случая: $n \vdots m$ (n кратно m) или НОД$(n,m)=1$ (числа n и m взаимно просты).
6) Если НОД$(n,m)=1$, то справедливо суждение: «для любого натурального l из $(l\cdot n) \vdots m$ следует $l \vdots m$».
7) Если произведение нескольких сомножителей делится на *простое* число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p:

$$(x\cdot y\cdot z\cdot\ldots\cdot n) \vdots p,\ \ p \text{ — простое} \Rightarrow x \vdots p,\ \text{или } y \vdots p,\ \text{или}\ldots,\ n \vdots p.$$

Задача № 250. Придумайте примеры на 7 свойств НОК и НОД.
Задача № 251. Задано число C_n^m. Найти делители этого числа в 2 случаях: а) n — простое число; б) n — составное число.
8) Если указано, что НОД$(n,m)=1$, то канонические разложения чисел n и m не содержат совпадающих делителей.
9) Если каноническое разложение числа n имеет разложение вида

$$n = n_1^{k_1}\cdot n_2^{k_2}\cdot n_3^{k_3}\cdot\ldots\cdot n_u^{k_u},$$

то любой из делителей числа n, т. е. элемент множества $\mathcal{D}_{n,t}$, может быть представлен каноническим разложением того же вида, но с кратностями $l_1, l_2, \ldots, l_u$, не превосходящими кратностей в разложении исходного числа, т. е.

$$\begin{cases} n \vdots m \\ n = n_1^{k_1}\cdot n_2^{k_2}\cdot n_3^{k_3}\cdot\ldots\cdot n_u^{k_u} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} m = n_1^{l_1}\cdot n_2^{l_2}\cdot n_3^{l_3}\cdot\ldots\cdot n_u^{l_u}, \\ 0 \leqslant l_i \leqslant k_i \quad i = 1,2,\ldots,u \end{array}$$

Итак, делитель не может содержать простых множителей, отличных от простых делителей исходного числа. Общее число делителей числа n равно $t = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_u+1)$.

Задача № 252. Найдите НОК и НОД следующих пар чисел с помощью канонического разложения: 36 и 60, 75 и 135, 210 и 345.

Задача № 253. Найдите НОК и НОД тройки чисел 90, 336 и 396 с помощью канонического разложения.

Задача № 254. С помощью канонического разложения выясните, какие из чисел 36, 60, 75, 135, 210, 345 делятся на 2, 3, 5, 8, 12, 15, 30.

Задача № 255. Чему равно произведение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел?

8.6 Деление с остатком и недостатком

Определение 65. *Деление* есть операция, обратная умножению, т. е. действие, позволяющее находить по заданному произведению и одному из сомножителей другой сомножитель.

Поскольку умножение есть процесс последовательного сложения одного и того же числа m (слагаемого) заданное число k раз:

$$n = \underbrace{m + m + m + \ldots + m}_{k \text{ раз}} = m \cdot k,$$

то деление есть процесс последовательного вычитания одного и того же числа m (вычитаемого или делителя) из исходного числа n (уменьшаемого или делимого) до получения нулевого остатка:

$$\underbrace{n - m, n - 2m, n - 3m, \ldots, m, 0}_{k \text{ раз}}.$$

Кратность операции вычитания (число повторных вычитаний) называется частным. Процесс последовательного вычитания символически записывается так: «$n : m = k$». Отсюда $n = k \cdot m$.

Например, $10 : 2 = 5$. Процесс вычитания: $10 - \underbrace{2 - 2 - 2 - 2 - 2}_{5 \text{ раз}}$. Получим последовательность остатков: $10 - 2 = 8$, $8 - 2 = 6$, $6 - 2 = 4$, $4 - 2 = 2$, $2 - 2 = 0$ (нулевой остаток — признак завершения процесса последовательного вычитания, т. е. деления).

Деление с остатком — это процесс последовательного вычитания их делимого (уменьшаемого) n одного и того же числа m (делителя) до получения остатка r, меньшего, чем делитель m. Число повторных вычитаний (кратность k операции вычитания) называется *неполным частным*, а остаток r называется *вычетом числа n по модулю m* и кратко обозначается так: $r = n \pmod{m}$ или $r \underset{m}{\equiv} n$. Исходное число (делимое) представляется суммой $n = k \cdot m + r$.

Деление нацело (без остатка) рассматривается как частный случай деления с остатком, когда остаток от деления r равен 0.

В общем случае деление числа n на число m есть определение неполного частного k и остатка (вычета) r, т. е. представления числа n в виде суммы $n = k \cdot m + r$, где $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, m - 1$ (всего m значений).

Если два натуральных числа x и y при делении на число m имеют одинаковые остатки (вычеты), то говорят, что число x сравнимо с числом y по модулю m. Такое сравнение кратко записывается так:

$$x \equiv y \pmod{m}.$$

Таким образом, можно рассматривать подмножество натуральных чисел, которые сравнимы друг с другом по модулю m, т. е. имеющих одинаковые остатки (вычеты) по модулю m. Такое подмножество называется классом вычетов по модулю m и обозначается так: $\mathcal{N}_{m,r}$, где индекс m — делитель (или модуль сравнения), r — вычет. Придавая r допустимые значения 0, 1, 2,. . . , $m-1$, получим m подмножеств (классов вычетов по модулю m): $\mathcal{N}_{m,0}$; $\mathcal{N}_{m,1}, \ldots,$ $\mathcal{N}_{m,m-1}$. Из соотношения $x, y \in \mathcal{N}_{m,r}$ следуют равенства:

$$\begin{aligned}
&x \equiv y \pmod m\\
&x : m = k \quad (\text{ост. } r) \text{ или } x = k \cdot m + r\\
&y : m = l \quad (\text{ост. } r) \text{ или } x = l \cdot m + r\\
&x - km = y - lm = r \text{ и т. п.}
\end{aligned}$$

Примечание. Если процесс последовательного вычитания продолжим до появления первого отрицательного остатка, то говорят, что выполнено деление с недостатком (или с превышением) и записывают символически так: $x = (k+1) \cdot m - q$, где $0 < q < m$.

Пример № 123.

$13 : 2 = 6$ (остаток 1) — деление с остатком;
$13 : 2 = 7$ (недостаток 1) — деление с недостатком;
$13 = 6 \cdot 2 + 1 = 7 \cdot 2 - 1$

Пример № 124. Пусть $m = 2$. Тогда $r = 0$ для чётных чисел и $r = 1$ для нечётных чисел. Имеем 2 подмножества натуральных чисел:

$$\mathcal{N}_{2,0} = \{x \mid x = 2m, m = 0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\text{и } \mathcal{N}_{2,1} = \{y \mid y = 2m + 1, m = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Пусть $m = 3$. Тогда

$$\mathcal{N}_{3,0} = \{x \mid x = 3m\}, \quad \mathcal{N}_{3,1} = \{y \mid y = 3m + 1\}, \quad \mathcal{N}_{3,2} = \{z \mid z = 3m + 2\},$$

где m — любое целое, и т. п.

Примечание. Запись «$X = \{x \mid$ условие на $x\}$» означает, что множество X состоит из тех и только их тех элементов x, для которых выполнено условие, записанное после знака «|».

В некоторых задачах ставятся дополнительные условия на r:

1) ограничения r снизу: $r_1 \leqslant r \leqslant m - 1$, где $r_1 > 0$ — заданное число; тогда $x \in \mathcal{N}_{m,r_1} \cup \mathcal{N}_{m,r_1+1} \cup \ldots \cup \mathcal{N}_{m,m-1}$;
2) ограничения r сверху: $0 \leqslant r \leqslant r_2$, где $r_2 < m - 1$ — заданное число; тогда $x \in \mathcal{N}_{m,0} \cup \mathcal{N}_{m,1} \cup \ldots \cup \mathcal{N}_{m,r_2}$;

3) двусторонние ограничения r: $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2 < m-1$. Из последовательности $\mathcal{N}_{m,0}, \ldots, \mathcal{N}_{m,m-1}$ выбираются только средние подмножества $\mathcal{N}_{m,r_1} \cup \mathcal{N}_{m,r_1+1} \cup \ldots \cup \mathcal{N}_{m,r_2}$.

Задача № 256. Принадлежат ли числа 96 и 161 к одному и тому же классу вычетов по модулю 13?

Задача № 257. Определите к какому классу вычетов по модулю 19 принадлежат числа 120, 547, 883?

Задача № 258. Поделите числа с остатком и с недостатком.

1) $5:2$	4) $7:3$	7) $9:7$	10) $11:5$	13) $13:3$
2) $5:3$	5) $8:3$	8) $9:8$	11) $11:7$	14) $17:11$
3) $7:2$	6) $8:5$	9) $11:3$	12) $11:9$	15) $19:9$

8.7 Признаки делимости

Признаки делимости позволяют установить делимость некоторого числа или сложного выражения на заданное число, не производя операции деления.

Следует знать, что в связи с делением одного натурального числа n на другое — m — существуют различные названия и словесные формулировки (выражения) компонентов операции, а также различные символические записи этой операции.

Минимально полезно знать следующие 5 форм записи операции деления и соответствующие им формулировки.

1) $n \vdots m$ — «число n делится на число m без остатка (точно, нацело)»;
2) $n : m = k$, где k — натуральное число. Возможны записи $n/m = k$ (знак «правая косая черта») и $\frac{n}{m} = k$ (используется знак «дробная черта»); n — делимое, m — делитель, k — частное от деления числа n на число m; здесь $\frac{n}{m}$ — целое число;
3) $n : m$ — отношение числа n к числу m;
4) $n = m \cdot k$ — произведение двух чисел m и k; числа m и k — сомножители произведения n; числа m и k — делители числа n (число n одновременно делится на число m и число k); число n кратно своим сомножителям m и k;
5) $n = 0 \pmod m$ — «эн по модулю эм есть нуль»; остаток от деления числа n на число m равне нулю. $\mathcal{N}_{m,0}$ — множество натуральных чисел, которые делятся на число m с остатком 0, т. е. без остатка.

В зависимости от характера решаемой задачи используется та или иная форма записи и формулировка. Необходимо свободно, быстро и безошибочно переходить от одной формы к другой.

Если число n не делится нацело на число m, то это свойство символически записывается в следующих формах:

1) $n \not\vdots\, m$ — «эн не делится на эм»; «эн делится на эм с остатком»;
2) $\frac{n}{m} = k + \frac{r}{m}$, где r — натуральное число, меньшее числа m;
   n — делимое, m — делитель, k — неполное частное, r — остаток от деления числа n на число m; $\frac{r}{m}$ — правильная дробь; $\frac{n}{m}$ — дробное число; Отсюда $k + \frac{r}{m} = k\frac{r}{m}$ — смешанная дробь с целой частью k и дробной частью $\frac{r}{m}$;
3) $n = m \cdot k + r$, где $r = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ m-1$ — деление числа n на число m с остатком;
4) $n = m \cdot (k+1) - q$, где $r = m-1,\ m-2,\ m-3 \ldots,\ 1$ — деление числа n на число m с недостатком; сумма остатка с недостатком от деления на m равна m: $r + q = m$;
5) $n = r \pmod m$ — «эн равно эр по модулю эм»; остаток от деления числа n на число m есть число r, меньшее, чем m; «эр есть вычет числа эн по модудю эм».

Приведём некоторые задачи на делимость чисел и признаки делимости на простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, а также на составные числа 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15,. . .

Делимость на 2^k, $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ Пусть число n имеет изображение

$$n = a_l a_{k-1} \ldots a_{k+1} a_k a_{k-1} a_{k-2} a_{k-3} \ldots a_1 a_0 = 10^k \cdot n_1 + n_0$$

Покольку $10 = 2 \cdot 5$, то $10^k = 2^k 5^k$ делится на 2^k. Следовательно, делимость числа n на 2^k зависит от делимости на 2^k числа n_0 (образовано k младшими разрядами числа n).

Примеры:

$7 \not\vdots\, 2$; $6 \vdots 2$; $26 \not\vdots\, 4$, поэтому $21\,127 \not\vdots\, 2$; $32\,126 \vdots 2$ и $32126 \not\vdots\, 4$.

$44 \vdots 4$; $244 \not\vdots\, 8$; $144 \vdots 8$, поэтому $32\,144 \vdots 4$; $32\,144 \vdots 8$, но $32244 \not\vdots\, 8$.

Делимость на 5^k. Пусть число n имеет изображение

$$n = a_l a_{k-1} \ldots a_{k+1} a_k a_{k-1} a_{k-2} a_{k-3} \ldots a_1 a_0 = 10^k \cdot n_1 + n_0$$

Покольку $10 = 2 \cdot 5$, то $10^k = 2^k 5^k$ делится на 2^k. Следовательно, делимость числа n на 5^k зависит от делимости на 5^k числа n_0 (образовано k младшими разрядами числа n).

Примеры:

$7 \not\vdots\, 5$; $50 \vdots 25$; $70 \not\vdots\, 25$, поэтому $127 \not\vdots\, 5$; $3250 \vdots 25$ и $3270 \not\vdots\, 25$.

$75 \vdots 25$; $275 \not\vdots\, 125$; $375 \vdots 125 \Rightarrow 3275 \vdots 25$; $32\,375 \vdots 125$, но $32\,275 \not\vdots\, 125$.

Делимость на 3 и 9. Делимость числа n на 3 или 9 зависит только от суммы цифр в изображении числа n, а именно любое число при делениии как на 3, так и на 9 даёт тот же остаток, что и сумма его цифр.

Пример № 125. Пусть $n = 73\,125$. Сумма цифр $S = 18$. Поскольку $S \vdots 3$ и $S \vdots 9$, то $n \vdots 3$ и $n \vdots 9$.

Пусть $n = 73\,129$. Сумая цифр $S = 22$. Имеем $22 = 7 \cdot 3 + 1$ и $22 = 2 \cdot 9 + 4$. Поэтому при делении числа n на 3 получим остаток 1, а при делении на 9 — остаток 4.

Внимание: если складывается несколько многозначных чисел, то для контроля вычислений используются 2 суммы, а именно:

1) общая сумма цифр всех слагаемых;
2) сумма цифр результата сложения исходных чисел.

Обе суммы при делении на 3 или 9 должны давать одинаковые остатки. Например, $2731 + 452 \neq 3283$, так как сумма цифр левой части равна 24 и делится на 3, а сумма цифр результата при делении на 3 даёт остаток 1. При сложении исходных чисел допущена ошибка.

Если перемножать несколько многозначных чисел, то можно воспользоваться следующей схемой контроля:

1) находим остатки от деления на 9 каждого из сомножителей: r_1, r_2, r_3, $\ldots$;
2) находим произведение полученных остатков;
3) находим остаток от деления на 9 как произведения исходных чисел, так и произведения остатков $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots$ Эти остатки должны совпасть.

Делимость на 11. Пусть число n имеет изображение $\overline{a_l a_{l-1} \ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$. Вычислим сумму S_0 цифр на чётных позициях: $S_0 = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots$, а также сумму цифр $S_1 = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ на нечётных позициях. Если разность $S_1 - S_0$ кратна 11, то n делится на 11.

Пример № 126. Найдём остаток от деления числа $n = 2\,347\,218$ на 11. Имеем: $S_0 = 8 + 2 + 4 + 2 = 16$ и $S_1 = 1 + 7 + 3 = 11$; $S_1 - S_0 = 11 - 16 = -5 \not\vdots\, 11$. Следовательно $n \not\vdots\, 11$.

Делимость на 7, 11, 13. Изображение числа n разобъём на тройки цифр (справа налево), т. е. на разрядные классы (класс единиц, класс тысяч, класс миллионов и т.д.), например

$$n = \underbrace{81}_{n_2}\,\underbrace{405}_{n_1}\,\underbrace{739}_{n_0}.$$

Сложим с переменным знаком получанные 3-значные числа: $n_0 - n_1 + n_2 = S$. Если число S больше 999, то его также разобъём на тройки (классы разрядов) и сложим полученные при этом 3-значные числа. Продолжая этот процесс дальше, рано или поздно получим 3-значное число

(быть может, отрицательное). Остаток (или недостаток) от деления полученного числа на 7 (или 11, или 13) будет такой же, как и у исходного числа n.

Пример № 127. Для упомянутого выше числа $n = 81\,405\,739$ имеем $S = 739 - 405 + 81 = 415$. $415 = 7 \cdot 59 + 2 = 37 \cdot 11 + 8 = 31 \cdot 13 + 12$. При делении на 7, 11 и 13 исходного числа n получаются те же самые остатки:

$$n = 11\,629\,391 \cdot 7 + 2,$$
$$n = 7\,400\,521 \cdot 11 + 8,$$
$$n = 6\,261\,979 \cdot 13 + 12,$$

что и требовалось показать.

Задача № 259. Делятся ли числа 2564 и 2544 на 3?

Задача № 260. Делятся ли числа 2564 и 2544 на 8?

Задача № 261. Делятся ли числа 24 525 и 24 625 на 9?

Задача № 262. Делятся ли числа 24 525 и 24 625 на 125?

Задача № 263. Делятся ли числа 554796 и 545796 на 11?

Задача № 264. Делится ли число 256 491 018 на 7? на 13?

Глава 9

Обыкновенные дроби

9.1 Числовая ось. Упорядочение чисел

В этой теме устанавливается связь между алгеброй и геометрией.

Выберем на плоскости произвольную прямую, а на ней — произвольную точку O в качестве начальной точки или начала отсчёта.

Точка O разбивает прямую на две полупрямые, которые имеют неограниченную пространственную протяжённость в двух противоположных направлениях. Одно из этих направлений выберем в качестве положительного, а другое направление назовём отрицательным.

Как правило считается, что прямая занимает горизонтальное положение. При этом правая полупрямая (относительно начала отсчёта — точки O) принимается за положительное направление и отмечается с помощью специального символа «стрелка вправо» (или «правая стрелка»). Отрицательное направление (левая полупрямая) стрелкой не отмечается.

Определение 66. Прямая, на которой выбрано начало отсчёта и указано положительное направление, называется *осью*. Правая полупрямая называется положительной полуосью, а левая полупрямая — отрицательной полуосью.

Выберем некоторый отрезок прямой в пространстве в качестве единичного, т. е. отрезка единичной длины. Такой отрезок называется *масштабом* (от нем. Maßstab — мерный шест; Maß — мера, Stab — шест, палка).

На прямой вправо и влево от точки отсчёта O последовательно будем откладывать единичные отрезки. Концы этих отрезков обозначим числами натурального ряда: 1, 2, 3, ..., n, ..., которые помечаются знаком «+» или «−».

Таким образом, каждому натуральному числу соответствует одна единственная точка, расположенная правее начало отсчёта, и другая точка, расположенная левее точки O (рис. 9.1).

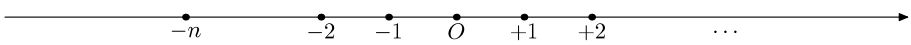


Рис. 9.1. Числовая ось

Точки, принадлежащие положительной полуоси и, следовательно, расположенные правее точки O, пометим знаком «+» (плюс). Эти числа называются *целыми положительными* (или *натуральными*) числами. Множество целых положительных (натуральных) чисел называется натуральным рядом

и обозначается заглавной латинской буквой «$\mathbb{N}$» (эн большое). Утверждение «пусть n — целое положительное (натуральное) число» кратко записывается в символической форме $n \in \mathbb{N}$ (читается: «число эн маленькое принадлежит множеству натуральных чисел»).

Примечание. Знак «$+$», стоящий перед натуральным числом $+n$ иногда, ради краткости, опускается, если это не приводит к недоразумениям.

Далее, точки, принадлежащие отрицательной полупрямой и, следовательно, расположенные по левую сторону от точки O, помечаются знаком «$-$» (минус) и называются *целыми отрицательными* числами.

Начало отсчёта (т. O) помечается цифрой «ноль» — символом «0».

Примечание. Иногда цифра «ноль» перечёркивается правой косой чертой: «$\emptyset$», чтобы отличать цифру от начальной точки O.

Число «$\emptyset$» — это особое число, имеющее особое свойство (в сравнении с другими числами). Его принято относить к целым числам.

Определение 67. Если число 0 присоединим к множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, то получим новое множество $\mathbb{N}'$ (эн большое штрих), которое называется множеством *целых неотрицательных чисел*.

Если число «$\emptyset$» присоединим к множеству целых отрицательных чисел, то получим множество *целых неположительных чисел*.

Таким образом, символы «0» или «-0» означают (изображают) одну и ту же точке O (начало отсчёта).

Определение 68. Множество всех целых чисел положительных и всех отрицательных чисел, включая ноль, называется *множеством целых чисел* и обозначается заглавной латинской буквой $\mathbb{Z}$ (зэт). Это начальная буква немецкого слова Zahl (*цааль*) — число.

Итак, на оси каждому целому числу (положительному «$+n$», или отрицательному «$-n$», или нулю) поставлена в соответствие одна и только одна точка прямой и тем самым проведена воображаемая разметка произвольно выбранной прямой.

Определение 69. Прямая, на которой выбрано начало отсчёта (точка O), указано положительное (а следовательно, и противоположное ему отрицательное) направление, выбран масштаб (единичный отрезок), проведена «разметка», т. е. расставлены точки, соответствующие целым числам $(0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n, \ldots)$, называется *числовой прямой*.

Введением понятия «*числовая ось*» мы устанавливаем логическую связь между двумя разделами математики — алгеброй и геометрией. Два разных

по своей природе математических объекта (точка и число) на числовой оси приобретают одинаковый математический смысл. Поэтому во многих математических рассуждениях понятия «точка» и «число» могут заменять друг друга, т. е. они взаимозаменяемы.

Точки числовой оси могут быть обозначены заглавными латинскими буквами: A, B, C, ..., X, Y, Z (такое обозначение принято в геометрии). В этом случае рядом с буквенным символом в круглых скобках записывается целое число, которое соответствует данной точке (рис. 9.2). Например, $A(+1)$, $B(+5)$, $C(-2)$.

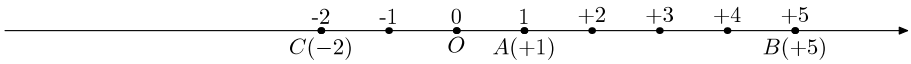


Рис. 9.2. Точки числовой оси и их координаты

Определение 70. Число, поставленное в круглых скобках рядом с буквенным обозначением точки, называется *координатой* данной точки, а точку O называют *началом координат* или *нулевой точкой*.

Таким образом, применительно к точке O числовой оси используются 4 устойчивых словосочетания: *точка ноль*, *нулевая точка*, *начало отсчёта*, *начало координат*. Они имеют одинаковый смысл во всех математических рассуждениях.

Координата точки, согласно правилам разметки числовой оси, характеризует удаление данной точки от начала координат. Положительное число $+n$ означает удаление данной точки от начала координат вправо на расстояние, равное сумме n единичных отрезков. Чем больше натуральное число n, тем дальше от начала координат расположена данная точка.

Отрицательное число $-n$ означает, что данная точка удалена от начала координат влево на расстояние, равное сумме n единичных отрезков.

Определение 71. Две точки числовой оси, удалённые от начала координат на одинаковое расстояние n, но расположенные по разные стороны от начала координат (координаты точек имеют противоположные знаки «+» и «−»), называются *симметричными точками* относительно нулевой точки (точки отсчёта, начала координат).

Числа, соответствующие симметричным точкам числовой оси, называются *противоположными числами*. Например, точки $A(-3)$ и $B(+3)$ симметричны относительно нулевой, а числа -3 и $+3$ — противоположны.

Другие примеры: $(-1, 1)$, $(-2, 2)$, $(-4, 4), \ldots$

Итак, противоположные числа отличаются друг от друга только своими знаками: «+» или «−». Положительное число, получающееся отбрасыванием знака у координаты точки, называется *абсолютной величиной* координаты

точки (или расстоянием между началом координат и данной точкой, или длиной отрезка от начала координат до данной точки). Например, длины отрезков OA и OB равны, если A и B — точки, симметричные относительно начала координат. Абсолютную величину называют также модулем.

Точки располагаются на числовой оси в направлении «слева направо», если в качестве положительной полуоси выбрана правая полупрямая. Координаты этих точек будут расположены в порядке возрастания (см. рис. 9.2). Если точка A расположена левее точки B, то координата точки A меньше, чем координата точки B.

Например, пусть заданы точки $C(-2)$ и $B(+5)$. Поскольку координата точки C равна -2, а координата точки B равна $+5$, и -2 меньше $+5$, то точка C расположена на числовой оси левее точки B. Если из большей координаты вычтем меньшую координату, то получим расстояние между этими точками (или длину отрезка, заданного этими двумя точками). Например, $5-(-2)=7=CB$ (см. рис. 9.2).

Итак, на числовой оси точки и соответствующие им целые числа упорядочены в направлении «слева направо» и в порядке возрастания координат этих точек (рис. 9.1).

Упорядоченность чисел указывается с помощью следующих символов: $>$ (больше), $<$ (меньше), $=$ (равно), $\geqslant$ (больше или равно), $\leqslant$ (меньше или равно), $\neq$ (не равно, т. е. меньше или больше). Например, символическая запись $x>y$ читается так: «число x больше числа y»; запись $x\leqslant y$ означает, что число x меньше или равно числу y.

9.2 Деление единичного отрезка на две равные части

Практическая деятельность человека связана с решением множества задач различного характера. Среди них можно выделить две взаимно противоположные по смыслу задачи — это «деление целого на части» и «составление целого из отдельных частей».

На бытовом уровне сущность операции «деление целого на части» выражается с помощью таких слов как *разделить, отделить, выделить, распределить, раздробить, расколоть, разложить* и т. п. Примерами могут служить такие процессы как разбиение учащихся одного класса на группы, распределение наследства между наследниками, разложение вещества на химические элементы, расщепление атома на элементарные частицы и т.д.

Противоположный процесс — составление целого из отдельных частей — характеризуется словами *объединить, сформировать, синтезировать, склеить, связать* и т. п.

Количественное описание реальных процессов деления осуществляется с помощью таких математических операций как: «деление одного числа на

другое», «разбиение множества объектов на подмножества», «деление геометрической фигуры на равные или неравные части» и др.

Рассмотрим наиболее простой случай, а именно деление единичного отрезка числовой оси на равные части (рис. 9.3).

Рассмотрим на числовой оси единичный отрезок OE, который отложен вправо от начала координат (точки O). Согласно разметке числовой оси, точка E имеет координату $+1$ (удаление точки E вправо на расстояние, равное длине единичного отрезка), что обозначается символьной конструкцией вида «$E(+1)$».

Отрезок OE будем рассматривать как «целостный объект», который можно делить на равные части.

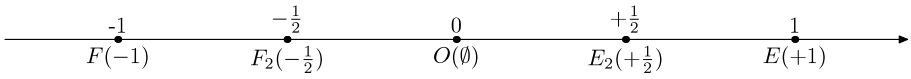


Рис. 9.3. Деление единичного отрезка на равные части

Наряду с отрезком OE будем рассматривать отрезок OF единичной длины, отложенный влево от нулевой точки O. Точка F имеет координату «-1», что обозначается символьной конструкцией вида «$F(-1)$». Отрезок OF также будем делить на равные части (доли).

Деление единичных отрезков на равные части (или равные доли) производится по следующей схеме. Сначала отрезок OE разделим пополам (рис. 9.3). Для этого на отрезке OE необходимо найти такую точку, которая была бы расположена на одинаковом расстоянии от концов отрезка. Эта точка называется серединой отрезка. Она обозначается буквенно-цифровой конструкцией вида E_2, в которой индекс «2» указывает, на сколько частей разбит исходный отрезок OE.

При делении отрезка OE пополам образуются две равные части — два отрезка: OE_2 и E_2E, причём $OE_2 = E_2E$.

Точка E_2 удалена от начала координат O на расстояние, равное половине единичного отрезка OE. Поэтому согласно правилам разметки числовой оси, точка E_2 ставится в соответствие число $\frac{1}{2}$, названное «половиной единицы» или, кратко, половиной. Это число является координатой точки E_2. Оно записано в форме специальной символьной конструкции или дробного числового выражения, состоящего из трёх элементов: числителя, дробной черты и знаменателя. Элементы записываются друг под другом, т. е. в столбик. В этом случае дробное числовое выражение называется *обыкновенной дробью*.

9.3 Дробные числа

Числитель обыкновенной дроби располагается наверху «столбика». Он указывает на длину разбиваемого отрезка. Если на равные части делится единичный отрезок, то числитель равен единице.

Знаменатель располагается внизу «столбика». Он указывает (знаменует), на сколько равных частей делится данный отрезок. Если он делится на две равные части (равные доли), то знаменатель равен двум.

Дробная черта (горизонтальный отрезок) располагается посередине «столбика», между числителем и знаменателем, отделяет их друг от друга.

Примечания:

1) Иногда обыкновенную дробь записывают «в одну строку». В этом случае горизонтальную дробную строку заменяют «правой косой чертой». Например, запись «$1/2$» имеет тот же математический смысл, что и запись «$\frac{1}{2}$» (одна вторая доля).
2) Существуют и другие формы записи числа «половина единицы». Например, в форме десятичной дроби: 0,5. Эти формы будут рассмотрены позднее.

Знак «$\sim$» (волна) означает эквивалентность, равносильность, одинаковость математического смысла двух способов обозначения одного и того же отрезка.

Определение 72. Символьная конструкция вида $\frac{a}{b}$, где a и b — буквенные обозначения чисел, называется *простой* (*обыкновенной*) *дробью* с числителем $a \in \mathbb{Z}$ и знаменателем $b \in \mathbb{N}$ или *рациональным числом*.

На примере деления отрезка на равные части рассмотрим некоторые операции над обыкновенными дробями. Воспользуемся истиной «если целое число можно разделить на две равные части, то полученные две половинки составляют единое целое».

Эта истина применительно к единичному отрезку OE запишется так: $OE_2 = E_2E$ и $OE_2 + E_2E = OE$. В координатной записи справедливы следующие равенства:

1) сумма двух «половины единицы» равна «единице», т. е. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$;
2) сумма двух одинаковых слагаемых равна произведению одного из слагаемых на 2, т. е. $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$;
3) если разделить пополам отрезок длины 2, то получим два равных отрезка длины 1, т. е. $\frac{2}{2} = 1$.

Сопоставляя три равенства, получим два новых равенства: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1+1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 = \frac{2}{2}$.

Отсюда вытекают два правила:

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

Утверждение. Чтобы сложить две обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями, необходимо сложить числители этих дробей и полученную сумму записать в числителе, а знаменатель сохранить без изменения.

Пример № 128. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Задача № 265. Сложите: 1) $\frac{1}{3}+\frac{7}{3}$; 2) $\frac{9}{7}+\frac{2}{7}$; 3) $\frac{34}{181}+\frac{71}{181}$; 4) $\frac{13}{5}+\frac{2}{5}$.

Задача № 266. Сложите: 1) $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}$; 2) $\frac{4}{7}+\frac{6}{7}$; 3) $\frac{3}{19}+\frac{17}{19}$; 4) $\frac{23}{7}+\frac{2}{7}$.

Задача № 267. Сложите: 1) $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}$; 2) $\frac{7}{9}+\frac{5}{9}$; 3) $\frac{7}{43}+\frac{9}{43}$; 4) $\frac{13}{76}+\frac{2}{76}$.

Утверждение. Поскольку знаменатель дроби может быть равен 1, то всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1.

Пример № 129. $3=\frac{3}{1}; 56=\frac{56}{1}$.

Умножение обыкновенной дроби на целое число.

Утверждение. Чтобы обыкновенную дробь умножить на целое число, достаточно умножить на это число числитель исходной дроби и произведение записать в числителе, а знаменатель сохранить без изменения.

Пример № 130. $\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{2}{2}=1$.

Задача № 268. Перемножьте:

1) $\frac{1}{4}\cdot 2$	4) $\frac{27}{7}\cdot 9$	7) $\frac{11}{13}\cdot 5$	10) $\frac{71}{13}\cdot 8$	13) $\frac{75}{13}\cdot 16$
2) $\frac{7}{4}\cdot 6$	5) $\frac{34}{181}\cdot 12$	8) $\frac{12}{11}\cdot 4$	11) $\frac{23}{16}\cdot 12$	14) $\frac{89}{47}\cdot 20$
3) $\frac{9}{7}\cdot 23$	6) $\frac{71}{181}\cdot 567$	9) $\frac{13}{17}\cdot 7$	12) $\frac{12}{18}\cdot 14$	

Определение 73. Если произведение двух чисел (в данном случае $\frac{1}{2}$ и 2) равно 1, то такие числа называются *взаимно обратными*.

Итак, при делении единичных отрезков OE и OF получаем две пары взаимно обратных чисел: $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

Логическую связь между взаимно противоположными и взаимно обратными числами $\left(-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$ можно представить наглядно в схематическом виде (рис. 9.4).

Отметим некоторые свойства взаимно противоположных и взаимно обратных чисел:

1) Сумма противоположных чисел равна нулю.

$$(+2)+(-2)=2-2=0;\quad \left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

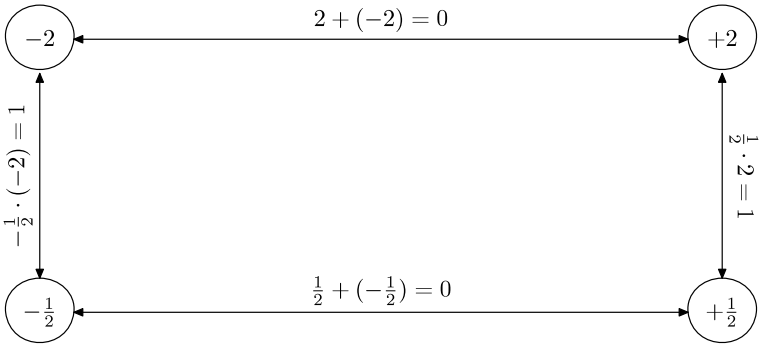


Рис. 9.4. Схема переходов к противоположным и обратным числам

2) Число, противоположное противоположному, равно первоначальному числу. Примеры: $2 \to (-2) \to -(-2) = 2$; $\frac{1}{2} \to \left(-\frac{1}{2}\right) \to -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
3) Нуль — особое число. Число, противоположное нулю, есть нуль, т. е. исходное число: $0 - 0 = 0 + 0 = 0$. Чисел, обладающих аналогичным свойством, больше нет. Отсюда следует простейшее логическое рассуждение: «если исходное число x равно своему противоположному $-x$, то это число есть нуль ($x = 0$)».
4) Произведение взаимно обратных чисел равно единице: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, если $x \neq 0$.
5) Число «нуль» не имеет обратного ему числа, так как деление на «нуль» лишено математического смысла (запрещено).
6) Число, обратное обратному, равно исходному. Примеры: $2 \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Итак, знаменатель знаменателя есть числитель: $-2 \to -\frac{1}{2} \to \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$.
7) Числа «$+1$» и «-1» — особые числа. Каждое из них имеет обратное число, равное самому себе, т. е. $1 \to \frac{1}{1} = 1$; $-1 \to \frac{1}{-1} = -1$. Чисел, обладающих этим же свойством, больше нет. Отсюда следует простейшее логическое рассуждение: «если число, обратное данному x, равно исходному числу x, то возможны два варианта: $x = 1$ или $x = -1$».

Свойства взаимно противоположных и обратных чисел, а также вытекающие из них простейшие логические рассуждения часто используются в тождественных преобразованиях алгебраических выражений и при решении систем уравнений.

Координаты точек деления единичных отрезков OE и OF упорядочены согласно следующей «цепочке» неравенств: $-1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1$.

Продолжим процесс деления отрезков пополам. Разделим каждую из половинок (OE_2, E_2E) единичного отрезка на две равные части. Получим отрезки, длина которых в четыре раза меньше, чем длина единичного отрезка.

Эта длина обозначается символьной конструкцией вида «$\frac{1}{4}$», которая называется обыкновенной дробью с числителем «единица» и знаменателем «четыре». Такая символьная запись читается как «одна четвёртая доля», или более кратко «одна четвёртая», или, совсем кратко, «четверть». Точки деления (концевые точки полученных отрезков) обозначим символами $E_{4,1}(+\frac{1}{4})$, $E_{4,2}(+\frac{2}{4})$, $E_{4,3}(+\frac{3}{4})$, $E_{4,4}(+\frac{4}{4}) = E(+1)$.

На отрезке OF точки деления обозначаются так: $F_{4,1}(-\frac{1}{4})$, $F_{4,2}(-\frac{2}{4})$, $F_{4,3}(-\frac{3}{4})$, $F_{4,4}(-\frac{4}{4}) = F(-1)$.

Задача № 269. Вычислить: $\frac{1}{8} + \frac{4}{8} - \frac{18}{64} \cdot 2 + \frac{4}{16}$.

Отношение эквивалентности дробей.

Определение 74. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются эквивалентными или равными тогда и только тогда, когда $a \cdot d = b \cdot c$.

Пример № 131. Следующие пары дробей эквивалентны: $\frac{3}{7}$ и $\frac{9}{21}$; $\frac{1}{-5}$ и $\frac{-2}{10}$; $\frac{-11}{6}$ и $\frac{22}{-12}$.

Если числитель и знаменатель данной дроби $\frac{a}{b}$ умножить на одно и то же целое число $k \neq 0$, то получим дробь $\frac{ak}{bk}$, эквивалентную данной.

Утверждение. Если числитель и знаменатель данной дроби $\frac{ak}{bk}$ разделить на одно и то же целое число $k \neq 0$, то получим дробь $\frac{a}{b}$, эквивалентную данной. Процесс деления числителя и знаменателя дроби $\frac{ak}{bk}$ на число $k \neq 0$ называется *сокращением дроби на число* k. Если при этом $k \neq 1$, то дробь называется сократимой.

Задача № 270. Равны ли следующие дроби?
1) $\frac{1}{8}$ и $\frac{3}{24}$; 2) $\frac{3}{4}$ и $\frac{24}{32}$; 3) $\frac{7}{9}$ и $\frac{14}{18}$; 4) $\frac{48}{72}$ и $\frac{6}{9}$; 5) $\frac{282}{369}$ и $\frac{94}{123}$.

Задача № 271. Эквивалентны ли следующие дроби?
1) $\frac{6}{14}$ и $\frac{18}{42}$; 2) $\frac{2}{-10}$ и $\frac{-4}{20}$; 3) $\frac{-1}{6}$ и $\frac{2}{-12}$.

9.4 Деление единичного отрезка на три равные части

Разделим единичный отрезок OE на три равные части (рис. 9.5). Каждый из трёх точек новых отрезков имеет длину $\frac{1}{3}$.

Обозначим конечные точки новых отрезков буквой E, снабжённой двойным индексом, причём первый индекс указывает на количество равных долей (в данном случае — это число 3), а второй индекс — это порядковый номер доли единичного отрезка (в данном случае — это числа 1, 2, 3). Итак, имеем конечные точки $E_{3,1}$; $E_{3,2}$; $E_{3,3}$, причём $E_{3,3}$ совпадает с «единичной» точкой E.

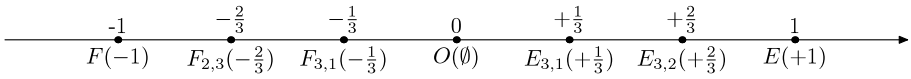


Рис. 9.5. Деление единичного отрезка на три равные части

Точка $E_{3,1}$ удалена от начала координат (точки O) на расстояние, в три раза меньшее, чем длина единичного отрезка. Следовательно, координата точки $E_{3,1}$ равна $\frac{1}{3}$ (одна третья доля или, кратко, треть).

Точка $E_{3,2}$ — конец второго отрезка. Она уделано от начала координат на две третьи доли, т. е. $OE_{3,2} = OE_{3,1} + E_{3,1}E_{3,2}$. Её координата равна $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Таким образом, отрезок $OE_{3,2}$ можно рассматривать как результат деления отрезка длины 2 на три равные доли (части).

На левой полуоси расположен единичный отрезок FO. Разделим его на 3 равные части. Получим три отрезка одинаковой длины — одна треть единичного отрезка. Концы отрезков (точки деления) обозначим буквой F с двойным индексом: $F_{3,1}(-\frac{1}{3})$, $F_{3,2}(-\frac{2}{3})$, $F_{3,3}(-\frac{3}{3}) = F(-1)$. Координаты точек деления единичных отрезков OE и OF упорядочены так:

$$-1 < -\frac{2}{3} < -\frac{1}{3} < 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1.$$

Доли единичного отрезка указываются координатами начальной и конечной точек каждого из долевых отрезков: $[-1, -\frac{2}{3}]$, $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$, $[-\frac{1}{3}, 0]$, $[0, +\frac{1}{3}]$, $[+\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}]$, $[+\frac{2}{3}, 1]$.

Заметим, что точка E_2 (середина отрезка OE) является также серединой долевого отрезка $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, т. е. $E_{3,1}E_2 = E_2E_{3,2}$. Аналогично, точка F_2 является серединой долевого отрезка $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$, т. е. $F_{3,2}F_2 = F_2F_{3,1}$.

Продолжим процесс разбиения отрезков на равные доли. Каждую «треть» единичного отрезка OE разделим на 3 равные части. Получим 9 отрезков, длина каждого из которых в 9 раз меньше длины единичного отрезка. Эту длину обозначим дробной конструкцией «$\frac{1}{9}$» (читается: «одна девятая доля» или, кратко, «одна девятая»). Точки деления (или концевые точки отрезков) обозначаются символами $E_{9,1}(+\frac{1}{9})$, $E_{9,2}(+\frac{2}{9})$, $E_{9,3}(+\frac{3}{9})$, $E_{9,4}(+\frac{4}{9})$, $E_{9,5}(+\frac{5}{9})$, $E_{9,6}(+\frac{6}{9})$, $E_{9,7}(+\frac{7}{9})$, $E_{9,8}(+\frac{8}{9})$, $E_{9,9}(+\frac{9}{9}) = E(+1)$.

Аналогично, на отрезке OF получим точки деления (концевые точки отрезков) $F_{9,1}(-\frac{1}{9})$, $F_{9,2}(-\frac{2}{9})$, $F_{9,3}(-\frac{3}{9})$, $F_{9,4}(-\frac{4}{9})$, $F_{9,5}(-\frac{5}{9})$, $F_{9,6}(-\frac{6}{9})$, $F_{9,7}(-\frac{7}{9})$, $F_{9,8}(-\frac{8}{9})$, $F_{9,9}(-\frac{9}{9}) = F(-1)$.

Помимо деления отрезков пополам или на три (четыре) равные доли, на практике часто используются десятые доли (одна десятая «$\frac{1}{10}$»), сотые доли (одна сотая «$\frac{1}{100}$»), тысячные доли (одна тысячная «$\frac{1}{1000}$»), миллионные доли (одна миллионная «$\frac{1}{1\,000\,000}$»), миллиардные доли (одна миллиардная «$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$») и.т.д. Такие дроби называются *десятичными*.

Наряду с дробными конструкциями, для обозначения длин долевых отрезков используются более «компактные» системы обозначений в виде «десятичных дробей» и «степенных выражений с отрицательными показателями» (см. таблицу):

Обыкн. дробь	Десят. дробь	Степен. форма	Наименование доли единицы
1/10	0,1	10^{-1}	Одна десятая (десяти́на)
1/100	0,01	10^{-2}	Одна сотая (проце́нт)
1/1000	0,001	10^{-3}	Одна тысячная (промилле)
1/1 000 000	0,000 001	10^{-6}	Одна миллионная (микро)
1/1 000 000 000	0,000 000 001	10^{-9}	Одна миллиардная (нано)

Тысячная, миллионная и миллиардная доли единицы используются, например, для обозначения временных интервалов в электронных устройствах: миллисекунда (0,001 сек), микросекунда (0,000 001 сек), наносекунда (0,000 000 001 сек).

Тысячная доля используется также и в других измерительных процессах. Например, миллиграммы, миллилитры, промилле (как единицы содержания вещества в одном грамме смеси), проба (содержание благородного металла — золота, серебра — в каком-нибудь сплаве) и т.д.

Сотая доля (процент, %) — наиболее употребительная мера, используемая в науках и на практике для характеристики части от целого, принятого за 100 единиц. Например, в процентах измеряется часть выполненной работы, рост производств, часть пройденного пути, уверенность в наступлении какого-нибудь события, содержание вещества в растворе или сплаве, содержание продуктов в кулинарных рецептах; копейка — сотая часть рубля; площадь земли «сотка» — это сотая часть гектара (10 000 кв.м.) и т.д.

Промилле (от лат. pro mille — за тысячу, женск.р., нескл.) — одна тысячная доля какого-либо числа, обозначаемая знаком ‰ (одна десятая процента).

При измерении содержания алкоголя в крови водителя используется величина промилле. Содержание паров алкоголя в выдыхаемом воздухе выражается в миллиграммах на 1 м^3 (мг/м^3). Соотношение концентрации алкоголя в крови и альвеолярном воздухе постоянно и, с учетом отношения плотностей воздуха и крови (1:2200), может быть ориентировочно выражено в промилле по крови. При этом 45 мг/м^3 в выдыхаемом воздухе соответствует 0,1 промилле алкоголя в крови.

9.5 Деление единичного отрезка на произвольное число равных частей. Рациональные числа

Рассмотрим общий случай — деление единичного отрезка на заданное число n равных частей (n — натуральное число, $n \in \mathbb{N}$). В результате такого деления получим n равных отрезков длины $\frac{1}{n}$.

Запись вида «$\frac{1}{n}$» — это обыкновенная дробь с числителем единица и знаменателем n (читается «энная доля единицы» или «одная энная»). Имеется ещё два вида записи длины долевых отрезков: $1 : n$ (читается «единица, делённая на n») и n^{-1} (читается «эн в степени минус единица»). Эти записи имеют одинаковый математический смысл, поэтому справедливы равенства:

$$\frac{1}{n} = 1 : n = n^{-1}, \quad \text{где } n = 1,\ 2,\ 3, \ldots.$$

Числа n и $\frac{1}{n}$ — это пара взаимно обратных чисел, их произведение равно единице: $n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Заметим, что нуль не имеет обратного ему числа, так как деление на нуль не имеет математического смысла.

Иногда число $\frac{1}{n}$, обратное числу n натурального ряда, называется *гармоническим числом* (гр. harmonia — связь, согласие, созвучие, соразмерность).

Таким образом, наряду с натуральным рядом чисел, получаем ряд гармонических чисел.

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n,\ n+1, \ldots \quad \text{— натуральный ряд}$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1}, \ldots \quad \text{— гармонический ряд}$$

Натуральные числа принадлежат бесконечному интервалу числовой оси от 1 до $+\infty$, а гармонические чсла расположены на конечном отрезке числовой оси от 0 до 1.

Ряд гармонических чисел — это убывающая последовательность:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$$

Расположение гармонических чисел на отрезке $[0, 1]$ числовой оси показано на рис. 9.6.

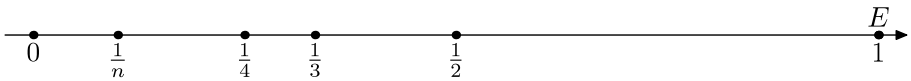


Рис. 9.6. Гармонические числа на единичном отрезке

Точки деления единичного отрезка OE обозначаются символами $E_{n,1}$; $E_{n,2}$; ...; $E_{n,m}$;..., $E_{n,n} = E$. (рис. 9.7).

Координата m-ой точки $E_{n,m}$ означает удаление этой точки от начала координат (точки отсчёта O). Она вычисляется как сумма длин m долевых отрезков:

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ слагаемых}} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}, \quad \text{где } m = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n.$$

Рис. 9.7. Точки деления единичного отрезка на n равных частей

Заметим, что число $\frac{m}{n}$ можно рассматривать как длину долевых отрезков, полученных при делении отрезка длины m на n равных частей, а два числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$ представляют собой пару взаимно обратных чисел.

Задача № 272. Вычислите сумму первых семи членов гармонического и натурального рядов.

Примечание. Символьная конструкция вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число и n — натуральные числа, имеет 4 различных названия:

1) частное от деления числа m на число n;
2) обыкновенная дробь с числителем m и знаменателем n;
3) отношение числа m к числу n;
4) *рациональное число*.

Задача № 273. Проверьте правильность следующих выражений: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} : : \frac{7}{3} = \frac{1}{14}$; $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) : \frac{7}{3} = \frac{9}{28}$.

9.6 Обыкновенные дроби и действия над ними

Определение 75. Символьная конструкция вида $\frac{a}{b}$, где a и b — буквенные обозначения чисел, называется *простой* (*обыкновенной*) *дробью* с числителем $a \in \mathbb{Z}$ и знаменателем $b \in \mathbb{N}$ или *рациональным числом*.

Пример № 132. $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{10}{9}$ и т. п. — обыкновенные дроби.

Определение 76. Символьная конструкция вида $\frac{1}{b}$, где b — буквенное обозначение чисел, называется *египетской, или аликвотной дробью*, например, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{99}$ и т. п.

Определение 77. Если члены обыкновенной дроби a и b являются числовыми выражениями, то дробь называется *сложной*.

Пример № 133. $\frac{a \cdot c}{b}$, $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{ac}{b-d}$ и т.д.

Определение 78. Если числитель a простой дроби меньше знаменателя b *по абсолютной величине*, то дробь называется *правильной*.

Пример № 134. $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{142}{145}$ и т.д. ($|a| < |b|$)

В случае равенства числителя и знаменателя ($a = b$) простая дробь $\frac{a}{b}$ заменяется единицей: $\frac{a}{a} = 1$.

Неправильная обыкновенная (простая) дробь может быть представлена в виде *смешанной дроби*, состоящей из двух частей: целой части и дробной части, являющейся правильной дробью. Для этого числитель a делится на знаменатель b с остатком $r < b$ и неполным частным n. Символьная конструкция смешанной дроби строится так: слева (или спереди) записывается неполное частное n, которое называется целой частью дроби, а рядом с целой частью (справа) записывается правильная дробь $\frac{r}{b}$ (числитель этой дроби равен остатку от деления r, а знаменатель равен знаменателю исходной дроби). Правильная дробь $\frac{r}{b}$ — дробная часть исходной неправильной дроби $\frac{a}{b}$.

Итак, $\frac{a}{b} = n + \frac{r}{b} = n\frac{r}{b}$. Такая символическая запись не означает операцию умножения n на $\frac{a}{b}$ (как это принято в алгебре), а означает операцию сложения целой и дробной частей.

Пример № 135. Пусть задана неправильная дробь $x = \frac{7}{3}$. При делении числа 7 на 3 получим неполное частное $n = 2$ и остаток $r = 1$. Следовательно, смешанная дробь имеет вид $2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$.

Числитель a неправильной дроби можно выразить через знаменатель b, неполное частное n и остаток r по формуле $a = bn + r$.

Обыкновенные дроби располагаются на числовой прямой так:

1) Правильные дроби располагаются в интервале от 0 до 1, если они положительные, и в интервале от -1 до 0, если они отрицательные. Например, если $x = \frac{2}{7}$ — правильная дробь, то справедливы неравенства $0 < \frac{2}{7} < 1$.
2) Неправильные дроби располагаются так:
   (а) положительные неправильные дроби, которые представляются в виде смешанной дроби $x = \frac{a}{b} = n\frac{r}{b}$, расположены на интервале от n до $n + 1$, т. е. $n < x < n + 1$;
   (б) для отрицательных неправильных дробей вида $-n\frac{r}{b}$, $n > 0$ справедливы неравенства $-(n + 1) < x < -n$.

Пример № 136. Пусть $x = 5\frac{1}{3}$, тогда $5 < x < 6$. Если же $x = -4\frac{2}{3}$, то $-5 < x < -4$.

Задача № 274. Представьте неправильную обыкновенную (простую) дробь в виде *смешанной дроби*, состоящей из двух частей: целой части и дробной части, являющейся правильной дробью.

1) $\frac{2}{8}$	3) $\frac{7}{4}$	5) $\frac{7}{3}$	7) $\frac{48}{14}$	9) $\frac{282}{69}$
2) $\frac{4}{24}$	4) $\frac{24}{7}$	6) $\frac{14}{5}$	8) $\frac{16}{9}$	10) $\frac{94}{13}$

9.7 Сравнение обыкновенных дробей. Пропорция

Пусть заданы две обыкновенные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Пусть $a, b, c, d > 0$. Результатом сравнения этих дробей является один (и только один) из трёх возможных вариантов логических соотношений.

1) Равенство дробей: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ называется *пропорцией*. У пропорции есть несколько свойств, которые мы рассмотрим позже.
2) Неравенство, когда первая дробь меньше второй: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
3) Неравенство, когда вторая дробь меньше первой: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Чтобы установить, какой из этих вариантов имеет место, вычисляем два произведения:

1) $a \cdot d$ — первый числитель умножается на второй знаменатель;
2) $b \cdot c$ — первый знаменатель умножается на второй числитель;

Полученные произведения сравниваются между собой как целые числа. Результат сравнения двух произведений («равно», «меньше» или «больше») совпадает с результатом сравнения дробей. Этот факт символически записывается так:

1) $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;
2) $ad < bc \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$;
3) $ad > bc \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Пример № 137. $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$, так как $3 \cdot 30 = 5 \cdot 18$.

Примечание.

1) Если числители двух обыкновенных дробей равны, то больше та дробь, у которой знаменатель меньше. Например, $\frac{137}{305} > \frac{137}{411}$, так как $305 < 411$.
2) Если знаменатели двух обыкновенных равны, то больше та дробь, у которой числитель больше. Например, $\frac{125}{411} < \frac{137}{411}$, так как $125 < 137$.

Задача № 275. Сравните 2 дроби 1) $\frac{17}{23}$ и $\frac{13}{23}$, 2) $\frac{135}{231}$ и $\frac{135}{271}$, 3) $\frac{5}{8}$ и $\frac{15}{23}$ 4) $\frac{11}{24}$ и $\frac{19}{45}$.

Умножение числителя и знаменателя дроби на заданное число. Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножаются на одно и то же число $m \neq 0$, то величина дроби не изменяется:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \quad m \neq 0.$$

Число m называется общим множителем числителя и знаменателя.

Пример № 138. $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{40}{56}$, $\quad \frac{9}{11} = \frac{9 \cdot 37}{11 \cdot 37} = \frac{333}{401}$.

Задача № 276. Приведите дробь к заданному знаменателю:

1) $\frac{1}{4}$ к знаменателю 28,
2) $\frac{11}{20}$ к 60,
3) $\frac{31}{36}$ к 180
4) $\frac{19}{105}$ к НОК$(105, 135)$.
5) $\frac{1}{5}$ к знаменателю 13,
6) $\frac{1}{4}$ к знаменателю 16,
7) $\frac{2}{7}$ к знаменателю 21,
8) $\frac{3}{8}$ к знаменателю 18,
9) $\frac{1}{4}$ к знаменателю 24,
10) $\frac{1}{7}$ к знаменателю 49.

Деление числителя и знаменателя дроби на заданное число. Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби разделить на одно и то же число $m \neq 0$, то величина дроби не изменится:

$$\frac{a}{b} = \frac{a/m}{b/m}$$

Число m называется общим делителем числителя и знаменателя.

Возможны следующим варианты выбора числа m:

1) Пусть $m =$ НОД$(a, b) > 1$. Тогда $a = k \cdot m$, $b = l \cdot m$, причём k и l — взаимно простые числа, т. е. НОД$(k, l) = 1$. Следовательно, $\frac{a}{b} = \frac{a/m}{b/m} = \frac{k}{l}$ — *несократимая* дробь. Деление числителя и знаменателя дроби на $m =$ НОД$(a, b) > 1$ называется *полным сокращением* дроби, в результате чего получается несократимая дробь.

2) Если $m =$ ОД(a, b) — какой-то общий делитель, $1 < m <$ НОД(a, b), то $a = p \cdot m$ и $b = q \cdot m$, НОД$(p, q) > 1$. В этом случае деление числителя и знаменателя дроби на число m называется частичным (неполным) сокращением дроби: $\frac{a}{b} = \frac{a/m}{b/m} = \frac{p}{q}$. Полученная дробь не является несократимой. Её можно сократить полностью, разделив числитель p и знаменатель q на НОД(p, q).

3) Если числитель a и знаменатель b — взаимно простые числа, т. е. НОД$(a, b) = 1$, то исходная дробь $\frac{a}{b}$ — несократимая. Тогда деление числителя и знаменателя на число $m \neq 1$, $m \neq 0$ приводит к сложной дроби $\frac{a}{b} = \frac{a/m}{b/m}$.

Пример № 139. Пусть $a = 82212$ и $b = 94860$. Чтобы сократить дробь $\frac{a}{b}$ необходимо найти общие делители a и b, в том числе и наибольший общий делитель НОД$(a, b) = m$. Воспользуемся методом последовательного деления

чисел a и b на простые числа.

$$\begin{array}{r|l} 82212 & 2 \\ 41106 & 2 \\ 20553 & 3 \\ 6851 & 13 \\ 527 & 17 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 94860 & 2 \\ 47430 & 2 \\ 23715 & 3 \\ 7905 & 3 \\ 2635 & 5 \\ 527 & 17 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

НОД(a, b) — это произведение простых общих делителей чисел a и b. В данном случае НОД$(a, b) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 31$. Тогда получим $\frac{82212}{64860} = \frac{\left(\frac{82212}{6324}\right)}{\left(\frac{94860}{6324}\right)} = \frac{13}{15}$ — несократимая дробь, так как НОД$(13, 15) = 1$.

Если $m =$ ОД$(a, b) = 4$, то исходная дробь сокращается частично: $\frac{82212}{94860} = \frac{20553}{23715}$.

Если числитель a и знаменатель b исходной дроби $\frac{a}{b}$ разложены на простые множители, то полного сокращения можно добиться путём последовательного сокращения их общих множителей. Например,

$$\frac{82212}{94860} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 13 \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{31}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{31}} = \frac{13}{3 \cdot 5} = \frac{13}{15}$$

Таким образом, вычисление НОД(a, b) не потребовалось.

Задача № 277. Сократите дроби: 1) $\frac{2856}{13104}$, 2) $\frac{6534}{11583}$, 3) $\frac{10143}{82593}$, 4) $\frac{10800}{3570}$.

9.8 Перевод неправильной дроби в смешанную и наоборот

Пусть задана неправильная обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$, где $a > b > 0$. Разделим числитель на знаменатель с остатком: $\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}$, где k — неполное частное, r — остаток ($r < b$). Число «k» называется целой частью неправильной дроби, правильная дробь $\frac{r}{b}$ называется дробной частью исходной неправильной дроби. Если НОД$(r, b) > 1$, то дробь $\frac{r}{b}$ сокращают на НОД(r, b). Неправильную дробь принято записывать не только в виде суммы $k + \frac{r}{b}$ целой и дробной частей, но и в виде специальной символьной конструкции «$k\frac{r}{b}$» (целая часть записана впереди дробной черты). Такая запись не означает умножение числа k на дробь $\frac{r}{b}$, а означает, что они складываются.

Пример № 140.

1) Пусть $\frac{a}{b} = \frac{61}{9}$. Имеем $\frac{61}{9} = \frac{54+7}{9} = 6 + \frac{7}{9} = 6\frac{7}{9}$, т. е. $k = 6$, $r = 7$.
2) Пусть $\frac{a}{b} = \frac{18}{8}$. Имеем $\frac{18}{8} = \frac{16+2}{8} = 2 + \frac{2}{8} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$, т. е. $k = 2$, $r = 2$, НОД(r, b) = НОД$(2, 8) = 2$. Следовательно, дробь $\frac{r}{b}$ сократим на 2. Окончательный ответ $2\frac{1}{4}$.

Задача № 278. Запишите неправильные дроби в виде смешанных дробей.

1) $\frac{24}{5}$	3) $\frac{207}{8}$	5) $\frac{35}{11}$	7) $\frac{47}{34}$	9) $\frac{38}{7}$	11) $\frac{71}{26}$
2) $\frac{135}{7}$	4) $\frac{371}{12}$	6) $\frac{3}{2}$	8) $\frac{12}{7}$	10) $\frac{487}{264}$	12) $\frac{457}{4}$

Пусть задана смешанная дробь $k\frac{r}{b}$ с целой частью k и дробной частью $\frac{r}{b}$. Умноженим целую часть k на знаменатель k и к полученному произведению kb прибавим числитель r. Полученную сумму $kb + r$ запишем в числитель искомой неправильной дроби, а знаменатель её оставим неизменным. Итак, $k\frac{r}{b} = \frac{kb+r}{b} = \frac{a}{b}$, $a > b$.

Пример № 141.

1) $6\frac{7}{9} = \frac{6 \cdot 9+7}{9} = \frac{61}{9}$ — неправильная дробь.
2) $2\frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4+1}{4} = \frac{9}{4}$ — неправильная дробь.

Задача № 279. Запишите смешанные дроби в виде неправильных дробей.

1) $2\frac{3}{5}$	3) $11\frac{7}{12}$	5) $1\frac{1}{2}$	7) $3\frac{3}{41}$	9) $7\frac{11}{21}$	11) $4\frac{2}{13}$
2) $7\frac{5}{7}$	4) $12\frac{10}{29}$	6) $1\frac{3}{7}$	8) $5\frac{1}{9}$	10) $13\frac{1}{3}$	12) $8\frac{6}{31}$

9.9 Тождественные преобразования дробей

Выделение целой части из дробного числа.

Пример № 142.

1) $\frac{81}{7}$ — неправильная дробь, преобразуем ее в тождественные выражения: $\frac{81}{7} = 1\frac{74}{7} = 2\frac{67}{7} = 3\frac{60}{7} = 4\frac{53}{7} = 5\frac{46}{7} = 6\frac{39}{7} = 7\frac{32}{7} = 8\frac{25}{7} = 9\frac{18}{7} = 10\frac{11}{7} = 11\frac{4}{7}$— тождественные дроби.
2) $8\frac{1}{2} = 7\frac{3}{2} = 6\frac{5}{2} = 5\frac{7}{2} = 4\frac{9}{2} = 3\frac{11}{2} = 2\frac{13}{2} =$ — двигаемся в сторону уменьшения целой части дроби.
3) $\frac{20}{3} = 1\frac{17}{3} = 2\frac{14}{3} = 3\frac{11}{3} = 4\frac{8}{3} = 5\frac{5}{3} = 6\frac{2}{3}$ — двигаемся в сторону увеличения целой части дроби.

Задача № 280. Выполните тождественные преобразования дробей в сторону уменьшения целой части дроби и в сторону увеличения.

1) $8\frac{31}{5}$	3) $11\frac{100}{13}$	5) $4\frac{46}{9}$	7) $3\frac{25}{4}$	9) $7\frac{11}{2}$	11) $4\frac{28}{13}$
2) $7\frac{57}{7}$	4) $12\frac{10}{6}$	6) $9\frac{33}{7}$	8) $5\frac{77}{9}$	10) $13\frac{59}{11}$	12) $8\frac{64}{13}$

9.10 Сложение или вычитание дробей

Складывать или вычитать можно любые дроби: правильные, неправильные и смешанные в любом сочетании. Однако компоненты операции (сложения или вычитания) должны иметь одинаковые знаменатели. Если исходные дроби имеют различные знаменатели, то они приводятся к общему знаменателю, равному наименьшему общему кратному знаменателей исходных дробей.

Рассмотрим сложение (вычитание) правильных дробей. Пусть заданы дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где $a < b$, $c < d$. Находим НОК$(b, d) = m$. Следовательно, $m = kb$ или $m = ld$, где k, l — коэффициенты кратности. Преобразуем исходные дроби: умножим числитель и знаменатель первой дроби на k, а второй дроби — на l. Получим $\frac{ak}{bk}$ и $\frac{cl}{dl}$, или $\frac{ak}{m}$ и $\frac{cl}{m}$ — дроби с одинаковыми знаменателями m (дроби содержат одинаковые доли единицы, имеют общий знаменатель). Такие дроби можно складывать (или вычитать), для чего складываются (или вычитаются) их числители, а знаменатель m остаётся неизменным.

Итак, общая схема сложения (вычитания) правильных дробей такова:

$$\frac{a}{b}^{\backslash k} \pm \frac{c}{d}^{\backslash l} = \frac{ak \pm cl}{m},$$

где $m =$ НОК(a, b), числа k, l — коэффициенты кратности знаменателей b и d соответственно. На эти числа умножаются числители a и c соответственно. коэффициенты k и l ещё называются дополнительным множителями для числителей дробей.

Если сумма $ak + cl$ (или разность $ak - cl$) имеет общий делитель с общим знаменателем m, то полученную дробь необходимо сократить. Кроме того, если получена неправильная дробь, то её преобразуют в смешанную дробь.

Таким образом, результат сложения или вычитания обыкновенных дробей представляется в виде несократимой правильной или смешанной дроби.

Примечание. Всё вышенаписанное относится в равной степени и к сложению (вычитанию) неправильных дробей. Переходить от неправильной дроби к смешанной в общем случае необязательно.

Пример № 143.

1) Исходные дроби имеют одинаковые знаменатели:
$\frac{7}{16}^{\backslash 1} + \frac{5}{16}^{\backslash 1} = \frac{7+5}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.
2) Исходные дроби имеют различные знаменатели:
   (а) $\frac{7}{8}^{\backslash 7} + \frac{11}{28}^{\backslash 2} = \frac{49+22}{56} = \frac{71}{56} = 1\frac{15}{56}$,
   (б) $\frac{7}{8}^{\backslash 7} - \frac{11}{28}^{\backslash 2} = \frac{49-22}{56} = \frac{27}{56}$,
   (в) $\frac{11}{28}^{\backslash 2} - \frac{7}{8}^{\backslash 7} = \frac{22-49}{56} = -\frac{27}{56}$,
   (г) $\frac{3}{28}^{\backslash 2} - \frac{71}{56}^{\backslash 1} = \frac{6-71}{56} = -\frac{65}{56} = -1\frac{9}{56}$.

Задача № 281. Приведите 2 дроби к одинаковому знаменателю: 1) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{7}$, 2) $\frac{11}{20}$ и $\frac{5}{12}$, 3) $\frac{5}{36}$ и $\frac{31}{60}$ 4) $\frac{18}{105}$ и $\frac{19}{135}$.

Задача № 282. Вычислите:

1) $\frac{1}{8}+\frac{4}{16}$;	8) $\frac{1}{5}-\frac{17}{19}$;	15) $\frac{2}{4}+\frac{7}{21}$;	22) $\frac{5}{2}+\frac{4}{3}$;
2) $\frac{18}{64}+\frac{3}{16}$;	9) $\frac{3}{9}+\frac{5}{21}$;	16) $\frac{7}{2}+\frac{71}{9}$;	23) $\frac{1}{8}+\frac{1}{13}$;
3) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$;	10) $\frac{4}{7}-\frac{7}{9}$;	17) $\frac{12}{4}-\frac{3}{9}$;	24) $\frac{7}{8}+\frac{4}{5}$;
4) $\frac{13}{64}+\frac{1}{4}$;	11) $\frac{7}{18}+\frac{1}{27}$;	18) $\frac{1}{9}+\frac{1}{7}$;	25) $\frac{3}{2}-\frac{51}{4}$;
5) $\frac{1}{80}+\frac{4}{160}$;	12) $\frac{2}{5}+\frac{4}{3}$;	19) $\frac{1}{4}-\frac{71}{3}$;	26) $\frac{11}{4}-\frac{13}{5}$;
6) $\frac{8}{18}-\frac{1}{16}$;	13) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$;	20) $\frac{1}{2}+\frac{1}{33}$;	27) $\frac{13}{6}-\frac{17}{7}$;
7) $\frac{3}{4}+\frac{5}{21}$;	14) $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$;	21) $\frac{1}{4}+\frac{1}{51}$;	28) $\frac{1}{14}+\frac{1}{15}$;

Сложение и вычитание смешанных дробей. Смешанная обыкновенная дробь $k\frac{a}{b}$ представляет собой краткую запись суммы целой части k и дробной части $\frac{a}{b}$, т. е. $k\frac{a}{b}=k+\frac{a}{b}$. В связи с этим целые части дробей суммируются (вычитаются) в отдельной группе, а дробные части — отдельно в другой группе. Кроме того, в отдельную группу объединяются дроби со знакому «плюс», а в другую группу — дроби со знаком «минус».

Результат выполнения операции необходимо представить в виде смешанной дроби, если имеет часть, и несократимой дробной части.

Пример № 144.

1) $5\frac{7}{16}+23\frac{5}{6}=(5+23)+\left(\frac{7}{16}^{\backslash 3}+\frac{5}{6}^{\backslash 8}\right)=28+\frac{21+40}{48}=28+\frac{61}{48}=29\frac{13}{48}$.

2) $\frac{7}{16}+23\frac{5}{7}=23+\left(\frac{7}{16}+\frac{5}{7}\right)=23+\frac{129}{112}=24\frac{17}{112}$.

3) $2\frac{5}{7}-5\frac{7}{16}=(2-5)+\left(\frac{5}{7}-\frac{7}{16}\right)=-3+\frac{80-49}{112}=-3+\frac{31}{112}=-2\frac{81}{112}$.

4) $115\frac{3}{4}-35\frac{1}{8}+6\frac{7}{9}+17\frac{5}{18}+41\frac{9}{10}=(115-35+6+17+41)+\left(\frac{3}{4}^{\backslash 90}-\frac{1}{8}^{\backslash 45}+\right.$
$\left.+\frac{7}{9}^{\backslash 40}+\frac{5}{18}^{\backslash 20}+\frac{9}{10}^{\backslash 36}\right)=144+\frac{270-45+280+100+324}{360}=62+\frac{929}{360}=64\frac{209}{360}$.

Задача № 283. Вычислите:

1) $1-\frac{3}{4}$;	4) $1\frac{5}{12}-\frac{9}{10}$;	7) $5\frac{7}{8}-\frac{9}{10}$;	10) $5\frac{7}{8}+2\frac{5}{12}$;
2) $5-2\frac{2}{5}$;	5) $2-\frac{5}{6}$;	8) $10\frac{1}{2}-4\frac{9}{14}$;	11) $3\frac{1}{8}-1\frac{2}{5}$
3) $3\frac{2}{7}+5\frac{3}{14}$;	6) $6-5\frac{5}{8}$;	9) $7\frac{3}{8}+1\frac{5}{6}$;	12) $2\frac{1}{3}-8\frac{3}{7}$

Задача № 284. Вычислите:

1) $3-\frac{1}{5}$;	5) $12-13\frac{1}{3}$;	9) $3\frac{3}{5}-1\frac{7}{3}$;	13) $3\frac{3}{35}+4\frac{2}{70}$;
2) $7-3\frac{3}{7}$;	6) $7-2\frac{1}{8}$;	10) $1\frac{2}{5}-5\frac{2}{7}$	14) $1\frac{6}{5}-5\frac{1}{3}$
3) $1\frac{1}{7}+1\frac{3}{5}$;	7) $3\frac{1}{4}-5\frac{2}{3}$;	11) $1\frac{4}{5}-1\frac{8}{13}$;	15) $6-\frac{3}{13}$;
4) $2\frac{5}{7}-3\frac{1}{9}$;	8) $1\frac{1}{12}-3\frac{2}{16}$;	12) $2\frac{2}{13}-3\frac{1}{15}$;	16) $3-2\frac{5}{8}$;

Задача № 285. Вычислите:

1) $5\frac{3}{8} - 3\frac{5}{6}$;
2) $8\frac{1}{12} - 3\frac{4}{15}$;
3) $2 - \frac{13}{33}$;
4) $13 - 8\frac{5}{12}$;
5) $\frac{4}{33} - 5\frac{5}{66}$;
6) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$;
7) $\frac{1}{2} - \frac{7}{13}$;
8) $\frac{7}{21} - \frac{8}{64}$;
9) $\frac{45}{105} - \frac{55}{110}$;
10) $8\frac{1}{13} - \frac{4}{12}$
11) $3\frac{4}{5} - 5$;
12) $8\frac{1}{3} - 4$

Задача № 286. Вычислите:

1) $3\frac{2}{9} - 5\frac{1}{7} - 13$;
2) $9\frac{1}{2} - 3\frac{3}{11} + 1\frac{1}{3}$;
3) $7 - \left(8\frac{3}{11} - 9\frac{1}{2}\right) - 7$;
4) $17 - 18\frac{3}{4} - 17\frac{1}{23} + 6\frac{1}{7}$;
5) $1\frac{3}{5} - 7\frac{3}{7} - 5\frac{5}{9} + 12\frac{4}{18}$;
6) $1 - 7\frac{23}{13} - 17\frac{14}{15} - 5\frac{17}{36} - 9$;
7) $8\frac{1}{5} \cdot 2 - 6\frac{3}{13} - 5\frac{1}{31} + 7$;
8) $13\frac{1}{11} - 17\frac{3}{23} - 5\frac{1}{3} \cdot 2 - 7$;
9) $22\frac{42}{108} \cdot 2 - 13\frac{5}{6} - 17\frac{14}{13}$;
10) $6 - 4\frac{1}{23} - 3 \cdot 31 - 7\frac{3}{5} - 5\frac{7}{13} - 7$;
11) $8\frac{1}{12} - 3\frac{4}{15} - 1\frac{7}{30}$;
12) $2 - \left(\frac{13}{33} - \frac{5}{22}\right)$;
13) $11 - 3\frac{1}{2} - 7\frac{1}{21} - 6\frac{1}{6}$;
14) $\frac{4}{33} - 5\frac{5}{66} - 2\frac{3}{4} + 33\frac{17}{19}$;
15) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - 3\frac{7}{16} - 5$;
16) $\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{7}{13} - 3\frac{3}{33}$;
17) $\frac{7}{21} - \frac{8}{64} - \frac{51}{102} \cdot 5$;
18) $\frac{45}{105} \cdot 5 : 15 - \frac{55}{110} - 7\frac{21}{77}$;
19) $8\frac{1}{13} - 2 \cdot 3 - \frac{4}{12} - 1\frac{1}{3}$;
20) $-3\frac{1}{31} - 4\frac{1}{6} - 2\frac{1}{5} + 3\frac{11}{17}$;
21) $5\frac{2}{3} + \frac{4}{7} - 5\frac{7}{19} - 9$;
22) $-3\frac{1}{19} \cdot 4 - \frac{3}{19} - 6\frac{3}{12}$;
23) $\frac{7}{21} - \frac{9}{24} - \frac{1}{109} \cdot 2$;
24) $-3\frac{4}{110} \cdot 5 : 15 - \frac{25}{1110} - 3\frac{34}{78}$;
25) $-8\frac{1}{14} - 2 \cdot 9 - \frac{9}{15} - 1\frac{1}{33}$.

9.11 Умножение обыкновенных дробей

Умножить целое число c на обыкновенную дробь $\frac{a}{b}$ (или обыкновенную дробь на целое число) — это значит перемножить числитель дроби с данным целым числом c, а полученное произведение ac записать в числитель результата, сохранив неизменным знаменатель b. Итак, справедливы символические записи:

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

Если $ac > b$, то дробь $\frac{ac}{b}$ необходимо представить в виде смешанной дроби с несократимой дробной частью.

Примечание. Знак умножения (точка) между множителями c и $\frac{a}{b}$ нельзя опускать, иначе запись $c\frac{a}{b}$ означает смешанную дробь, т. е. сумму $c + \frac{a}{b}$, но вовсе не произведение.

Пример № 145. Пусть дана дробь $\frac{a}{b} = \frac{3}{8}$ и число $c = 5$. Тогда $c \cdot \frac{a}{b} = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

Особые случаи:

1) Произведение обыкновенной дроби на 0 равно нулю: $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$.
2) При умножении обыкновенной дроби на 1 дробь не изменяется: $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$.
3) При умножении обыкновенной дроби на -1 абсолютная величина дроби не изменяется, но знак дроби меняется на противоположный. На -1 можно умножить как и всю дробь, так и отдельно её числитель или знаменатель. Таким образом, символические записи $-\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{b}$ и $\frac{a}{-b}$ имеют одинаковый математический смысл.

Умножить обыкновенную дробь $\frac{a}{b}$ на другую обыкновенную дробь $\frac{c}{d}$ означает получение новой дроби, числитель которой равен произведению числителей ac, а знаменатель — произведению знаменателей исходных дробей bd. Итак, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. По необходимости произведение дробей сокращается, чтобы результат представить в виде несократимой дроби.

Пример № 146.

1) $\frac{7}{15} \cdot \frac{3}{28} = \frac{7 \cdot 3}{15 \cdot 28} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{20}$.
2) $\frac{82212}{94860} \cdot \frac{13}{15} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 13 \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{31} \cdot 13}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{31} \cdot 15} = \frac{169}{225}$.

Умножить смешанную дробь $k\frac{a}{b}$ на число c означает умножение суммы $k + \frac{a}{b}$ на это число, т. е. $k\frac{a}{b} \cdot c = (k + \frac{a}{b}) \cdot c = kc + \frac{a}{b} \cdot c = kc + \frac{ac}{b}$. Если $ac > b$, то выделяется целая часть и по необходимости производится сокращение дробной части.

Умножить одну смешанную дробь $k\frac{a}{b}$ на другую смешанную $l\frac{c}{d}$ означает умножение суммы $k + \frac{a}{b}$ на другую сумму $l + \frac{c}{d}$. Результат умножения (произведение) представляется в форме смешанной дроби с целой частью и несократимой дробной частью.

Итак,

$$k\frac{a}{b} \cdot c = (k + \frac{a}{b}) \cdot c = kc + \frac{ac}{b},$$

$$k\frac{a}{b} \cdot l\frac{c}{d} = (k + \frac{a}{b}) \cdot (l + \frac{c}{d}) = kl + \frac{a}{b} \cdot l + \frac{c}{d} \cdot k + \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Пример № 147.

1) $5\frac{7}{8} \cdot 2 = \left(5 + \frac{7}{8}\right) \cdot 2 = 5 \cdot 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 = 10 + \frac{7}{4} = 11\frac{3}{4}$.
2) $5\frac{7}{8} \cdot 3\frac{2}{3} = \left(5 + \frac{7}{8}\right)\left(3 + \frac{2}{3}\right) = 5 \cdot 3 + \frac{7}{8} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} = 15 + \frac{21}{8} + \frac{10}{3} + \frac{7}{12} =$
$= 15 + \frac{63+80+14}{24} = 21 + \frac{13}{24} = 21\frac{13}{24}$.

Задача № 287. Выполните умножение:

1) $3\frac{2}{7} \cdot 3$;
2) $5\frac{21}{25} \cdot 7$;
3) $4\frac{3}{5} \cdot 6\frac{1}{8}$;
4) $11\frac{5}{9} \cdot 3\frac{18}{25}$;
5) $1\frac{3}{8} \cdot 6$;
6) $4\frac{1}{11} \cdot 4$;
7) $3\frac{1}{3} \cdot 4$;
8) $7\frac{1}{18} \cdot 3$;
9) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{9}{2}$;
10) $2\frac{1}{7} \cdot 4$;
11) $3\frac{1}{15} \cdot 2$;
12) $7\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{3}$;

13) $11\frac{5}{19} \cdot 3\frac{12}{15}$;
14) $1\frac{3}{4} \cdot 7$;
15) $3\frac{1}{9} \cdot 5$;
16) $7\frac{1}{23} \cdot 4$;
17) $3\frac{78}{18} \cdot 3$;
18) $1\frac{23}{2} \cdot 1\frac{11}{3}$.

9.12 Проценты

Определение 79. Сотая часть какого-либо числа называется процентом данного числа. Чтобы найти $n\%$ от числа A, надо число A разделить на 100 и умножить на n. По-другому, $n\%$ от A равно $A \cdot \frac{n}{100}$.

Пример № 148. 5% от 160 равно $160 \cdot \frac{5}{100} = 8$; 17% от 154 равно $154 \cdot \frac{17}{100}$.

Задача № 288. Найдите $n\%$ от числа A:

1) $A = 3$; $n = 4\%$;
2) $A = 13$; $n = 7\%$;
3) $A = 38$; $n = 14\%$;
4) $A = 47$; $n = 41\%$;
5) $A = 89$; $n = 89\%$;
6) $A = 7\frac{1}{23}$; $n = 2\%$;
7) $A = 3\frac{78}{18}$; $n = 13\%$;
8) $A = 1\frac{23}{2}$; $n = 44\%$;
9) $A = 3\frac{3}{13}$; $n = 200\%$;
10) $A = 6\frac{37}{78}$; $n = 138\%$;
11) $A = 5\frac{13}{17}$; $n = 104\%$;
12) $A = 36\frac{3}{7}$; $n = 10\%$.

Пример № 149. Масса стали составляет $n = 5\%$ от массы переработанной железной руды L. Сколько руды требуется для выплавки $F = 150$ тонн стали?
Решение: $F : n = 150 : 5 = 30$. $L = 30 \cdot 100\% = 3000$ тонн.

Пример № 150. Масса сахарного песка составляет $n = 15\%$ от массы переработанной сахарной свеклы L. Сколько свеклы требуется для изготовления $F = 450$ тонн сахарного песка?
Решение: $F : n = 450 : 15 = 30$. $L = 30 \cdot 100\% = 3000$ тонн.

Задача № 289. Найдите L по $n\%$ и F:

1) $F = 1$; $n = 2\%$;
2) $F = 5$; $n = 23\%$;
3) $F = 45$; $n = 123\%$;
4) $F = 147$; $n = 3\%$;
5) $F = 890$; $n = 13\%$;
6) $F = 1\frac{2}{13}$; $n = 3\%$;
7) $F = 2\frac{7}{5}$; $n = 130\%$;
8) $F = 5\frac{7}{6}$; $n = 149\%$;
9) $F = 1\frac{1}{3}$; $n = 3000\%$;
10) $F = 21\frac{3}{12}$; $n = 71\%$;
11) $F = 5\frac{10}{15}$; $n = 105\%$;
12) $F = 27\frac{4}{7}$; $n = 7\%$.

Пример № 151. По плану суточная добыча угля должна быть $k = 2500$ тонн. Шахта решила выполнить $j = 115\%$ плана. Сколько тонн угля должна добыть шахта для выполнения нового плана k_n?
Решение: $2500 \cdot 115 = 287500$; $287500 : 100 = 2875$ тонн.

Задача № 290. Найдите k_n при имеющихся $j\%$ и k:

1) $j = 7$; $k = 56$;
2) $j = 47$; $k = 37$;
3) $j = 173$; $k = 854$;
4) $j = 45$; $k = 457$;
5) $j = 246$; $k = 684$;
6) $j = 1\frac{2}{16}$; $k = 34$;
7) $j = 25\frac{12}{35}$; $k = 6$;
8) $j = 3\frac{27}{34}$; $k = 17$;
9) $j = 5\frac{1}{3}$; $k = 112$;
10) $j = 1\frac{1}{3}$; $k = 275$;
11) $j = 2\frac{5}{26}$; $k = 452$;
12) $j = 67\frac{57}{38}$; $k = 109$.

9.13 Операция деления над обыкновенными дробями

Деление есть операция, обратная умножению. Если число z есть произведение двух сомножителей x и y, т. е. $z = x \cdot y$, то каждый из сомножителей есть результат деления числа z на другой сомножитель, т. е. $x = z : y$ и $y = z : x$.

Операция деления имеет следующие виды символических записей:

1) Деление обозначается двоеточием:
   $x = z : y$, где z — делимое, y — делитель, x — частное, причём $y \neq 0$, $x \cdot y = z$.
   $y = z : x$, где z — делимое, x — делитель, y — частное, причём $x \neq 0$, $x \cdot y = z$.
2) Деление обозначается дробной чертой:
   $x = \frac{z}{y}$, где z — числитель, $y \neq 0$ — знаменатель; x — обыкновенная дробь (рациональное число, если y и z — целые числа).
   $y = \frac{z}{x}$, где z — числитель, $x \neq 0$ — знаменатель; y — обыкновенная дробь (рациональное число, если x и z — целые числа).
3) Деление заменяется умножением делимого на число, обратное делителю:
   $x = \frac{z}{y} = z \cdot \frac{1}{y}$, где $y \neq 0$, $\frac{1}{y}$ — число, обратное делителю y, то есть $y \cdot \frac{1}{y} = 1$. Число, обратное обратному числу есть исходное число: $\frac{1}{1/y} = \frac{y}{1} = y$. Переход от исходной дроби $\frac{y}{1}$ к обратной дроби $\frac{1}{y}$ называется *обращением дроби* («переворачиванием»).
   В общем случае, когда задана произвольная обыкновенная дробь с числителем a и знаменателем b $(a, b \neq 0)$, операция обращения означает, что числитель и знаменатель дроби меняются местами: $\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{b}{a}$.

Отсюда получаем правило деления двух дробей: «при делении одной дроби на другую, числитель числителя и знаменатель знаменателя переходят в числитель, а числитель знаменателя и знаменатель числителя переходят в знаменатель новой дроби»:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Символическая конструкция, содержащая несколько символов дробной черты называется *многоступенчатой* (или сложной) *дробью*. Дробная черта, проведённая на уровне середины знака равенства «=», называется *главной дробной чертой*.

Рассмотрим частные случаи деления дробей:

1) Деление обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$ на целое число c равносильно умножению этой дроби на число, обратное делителю, т. е.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

Геометрический смысл операции деления дробей: это деление на c равных частей отрезка длиной $\frac{a}{b}$ или деление отрезка длиной a на bc равных частей.

Пример № 152. $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$.

2) Деление целого числа c на обыкновенную дробь $\frac{a}{b}$ равносильно умножению дроби $\frac{c}{1}$ с единичным знаменателем на обращённый делитель, т. е. на $\frac{b}{a}$.

$$c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Пример № 153. $3 : \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$.

3) Деление обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$ на обыкновенную дробь $\frac{c}{d}$ равносильно умножению первой дроби на обращённую вторую, т. е. на дробь $\frac{d}{c}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Пример № 154.

$\frac{3}{8} : \frac{2}{7} = \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{16}$.

4) Для деления смешанной дроби на смешанную дробь их превращают в неправильные дроби, а потом уже производят деление по описанной схеме.

Пример № 155. $2\frac{1}{3} : 3\frac{5}{8} = \frac{7}{3} : \frac{29}{8} = \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{29} = \frac{56}{87}$.

Примеры перестановки членов сложных дробей:

1) $a : \frac{b}{c/d} = a : \frac{bd}{c} = a \cdot \frac{c}{bd} = \frac{ac}{bd}$,

2) $a : \frac{b/c}{d} = a : \frac{b}{cd} = \frac{acd}{b}$,

3) $\frac{a}{b/c} : d = \frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd}$,

4) $\frac{a/b}{c} : d = \frac{a}{bc} : d = \frac{a}{bcd}$.

Пример № 156.

1) $2 : \frac{3}{4/5} = 2 : \frac{3 \cdot 5}{4} = 2 \cdot \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$.

2) $2 : \frac{3/4}{5} = 2 : \frac{3}{4 \cdot 5} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

3) $\frac{2}{3/4} : 5 = \frac{2 \cdot 4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$.

4) $\frac{2/3}{4} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 4} : \frac{5}{1} = \frac{2}{3 \cdot 4} \cdot 15 = \frac{1}{30}$.

9.14 Многоступенчатые (сложные / двойные) дроби

Пример № 157. Операции над двойными дробями.

1) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} = 1,(3)$

2) $\frac{\frac{28}{31}}{\frac{44}{45}} = \frac{28}{31} : \frac{12}{25} = \frac{28}{31} \cdot \frac{25}{12} = \frac{28 \cdot 25}{31 \cdot 12} = \frac{700}{372} = \frac{350}{186} = \frac{175}{93}$

3) $\frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{3} : \frac{4}{1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

4) $\frac{4}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{1} : \frac{1}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{12}{1} = 12$

5) $\frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{3} : \frac{9}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{27}$

Задача № 291. Упростите:

1) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}$; 2) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}}$; 3) $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{7}}$; 5) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{11}}$; 6) $\frac{\frac{11}{3}}{\frac{15}{4}}$; 7) $\frac{\frac{21}{3}}{\frac{7}{3}}$; 8) $\frac{\frac{1}{33}}{\frac{11}{3}}$; 9) $\frac{\frac{10}{2}}{\frac{2}{40}}$; 10) $\frac{\frac{100}{30}}{\frac{10}{40}}$; 11) $\frac{\frac{17}{7}}{\frac{7}{17}}$; 12) $\frac{\frac{7}{17}}{\frac{3}{17}}$; 13) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}$; 14) $\frac{\frac{45}{10}}{\frac{15}{45}}$; 15) $\frac{\frac{55}{25}}{\frac{55}{45}}$; 16) $\frac{\frac{100}{21}}{\frac{7}{45}}$; 17) $\frac{\frac{115}{2}}{\frac{65}{4}}$; 18) $\frac{\frac{155}{250}}{\frac{550}{345}}$; 19) $\frac{\frac{1001}{11}}{\frac{111}{1}}$; 20) $\frac{\frac{333}{30}}{\frac{11}{3}}$.

Задача № 292. Упростите:

1) $\frac{1\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}$; 2) $\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$; 3) $\frac{3\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}}$; 4) $\frac{\frac{1}{6}}{1\frac{1}{3}}$; 5) $\frac{\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}}$; 6) $\frac{\frac{11}{3}}{3\frac{5}{4}}$; 7) $\frac{1\frac{2}{3}}{3\frac{4}{3}}$; 8) $\frac{3\frac{1}{3}}{5\frac{7}{8}}$; 9) $\frac{5\frac{10}{2}}{10\frac{2}{40}}$; 10) $\frac{7\frac{10}{4}}{21\frac{3}{4}}$; 11) $\frac{56\frac{7}{17}}{64\frac{2}{3}}$; 12) $\frac{5\frac{3}{17}}{12\frac{3}{12}}$; 13) $\frac{45\frac{1}{5}}{75\frac{5}{10}}$; 14) $\frac{111\frac{11}{1}}{11\frac{1}{22}}$; 15) $\frac{\frac{45}{55}}{450}$; 16) $\frac{\frac{67}{17}}{4}$; 17) $\frac{13}{\frac{1}{7}}$; 18) $\frac{\frac{15}{25}}{550}$; 19) $\frac{\frac{1001}{11}}{43}$; 20) $\frac{\frac{9}{30}}{81}$.

Задача № 293. Упростите:

$$\frac{\left[3\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} + \left(1\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{2} + \left(1\frac{1}{7} - \frac{23}{49}\right) : \frac{22}{147}\right]}{2 : 3\frac{1}{5} + \left(3\frac{3}{4} : 13\right) : \frac{2}{3} - \left(2\frac{5}{18} - \frac{17}{36}\right) \cdot \frac{18}{65}}$$

Задача № 294. Упростите:

$$\frac{\left\{\left[\left(3\frac{17}{12}\right) - \left(2\frac{11}{18}\right) + \left(2\frac{1}{24}\right)\right] \cdot \left(1\frac{5}{31}\right) - \frac{3}{52} \cdot \left[\left(3\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6}\right]\right\} \cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84} : \left(5\frac{13}{42} - 2\frac{13}{28} + \frac{5}{24}\right) + 1\frac{2}{27} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}}$$

Задача № 295. Упростите:

$$\frac{16\frac{1}{3} - 11\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{25}\right) + \left(\frac{5}{48} \cdot 3\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{(-2)}{24}\right) - 2 + \frac{1}{16}}{\left(3\frac{3}{4} \cdot 2 - 9\right) : \left(\frac{(-7)}{8}\right) - \left[\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{11}\right) : \frac{3}{5} - \frac{1}{22} : \frac{2}{31}\right] \cdot 22}$$

Задача № 296. Упростите:

$$\frac{\left(\frac{1}{4}:4+\frac{3}{16}\right)\cdot\left(20\frac{5}{8}:5\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{(-17)}{117}\right)}{\left(9\frac{8}{9}-8\frac{11}{12}\right)\cdot\frac{18}{115}+6\frac{5}{6}:13\frac{2}{3}+\frac{8}{23}-15\frac{74}{118}}$$

Задача № 297. Упростите:

$$\frac{\left[1\frac{1}{5}:1\frac{1}{7}+\left(1\frac{6}{14}:2\frac{14}{35}\right)\cdot 3\frac{1}{7}+\left(1\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right):\frac{4}{16}\right]}{7:2\frac{1}{3}+\left(2\frac{1}{7}:5\right):\frac{3}{7}-\left(8\frac{56}{12}-32\frac{4}{36}\right)\cdot\frac{12}{45}}$$

Задача № 298. Упростите:

$$\frac{\left\{\left[\left(1\frac{3}{4}\right)-\left(5\frac{7}{12}\right)+\left(3\frac{1}{9}\right)\right]\cdot\left(7\frac{4}{32}\right)-5\frac{2}{19}\cdot\left[\left(2\frac{2}{3}\right)-4\frac{7}{-6}\right]\right\}\cdot 1\frac{-7}{11}}{\frac{9}{-4}:\left(3\frac{1}{-4}-4\frac{1}{-8}+\frac{-4}{16}\right)+1\frac{2}{-8}-\frac{1}{-3}\cdot\frac{-4}{14}}$$

Задача № 299. Упростите:

$$3\frac{6\frac{1}{8}-13\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{-6}+2\frac{-2}{7}\right)-\left(5\frac{3}{-8}\cdot 3\frac{1}{-3}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{(-7)}{2}\right)-4+\frac{3}{-6}}{\left(2\frac{-3}{2}\cdot 2-3\right):\left(\frac{(-9)}{4}\right)-\left[\left(\frac{2}{-3}\cdot\frac{1}{13}\right):\frac{2}{7}-\frac{-1}{2}:\frac{5}{-11}\right]\cdot 7}$$

Задача № 300. Упростите:

$$-\frac{\left(-\frac{1}{-9}:3+\frac{-3}{12}\right)\cdot\left(-2\frac{3}{2}:3\frac{1}{6}+\frac{-1}{3}\right)-\left(\frac{(-7)}{12}\right)}{\left(-4\frac{1}{-9}-4\frac{1}{-4}\right)\cdot\frac{-8}{-12}+1\frac{1}{-6}:3\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-1\frac{-4}{-18}}$$

9.15 Пропорции

Пусть заданы две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, или, что тоже самое, отношения.

Определение 80. Равенство двух отношений называется пропорцией:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{ — пропорция.}$$

Пропорцию можно записать в другом виде:

$$a:b=c:d.$$

Члены пропорции имеют свои названия: a и d — крайние члены пропорции, b и c — средние члены; кроме этого, a и c называются предыдущими, b и d — последующими членами.

Пример № 158. $\frac{30}{12}=\frac{5}{2},\ 45:63=60:84.$

Свойства пропорции.

1) *Основное свойство пропорции.*
Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции:
$$ad = bc.$$
Это равенство можно делить на любое ненулевое число. Значит, из равенства можно получить выражение для каждого из членов пропорции:
$$a = \frac{bc}{d}, \quad b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}, \quad d = \frac{bc}{a}.$$

2) *Перестановки членов.*
В каждой пропорции можно переставить: 1) средние члены, 2) крайние члены и 3) крайние на место средних. От таких перестановок пропорция не нарушится, так как не нарушится основное свойство пропорции.
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Пример № 159. Решим уравнения $\frac{x}{5} = \frac{9}{20}$, $\frac{243}{56} = \frac{27}{x}$.
Для решения этих уравнений можно воспользоваться выражениями для членов пропорций $a = \frac{bc}{d}$ и $d = \frac{bc}{a}$. В первом случае получим $x = \frac{5 \cdot 9}{20} = \frac{9}{4}$, во втором — $x = \frac{56 \cdot 27}{243} = \frac{56}{9}$.
Рассуждения можно провести без ссылки на выражения для членов пропорции. Для этого левую и правую части первого уравнения умножаем на знаменатель первой дроби, т. е. на 5, получаем тот же ответ $x = 5 \cdot \frac{9}{20} = \frac{9}{4}$.
Для решения второго уравнения надо сначала переставить крайние члены пропорции: $\frac{243}{56} = \frac{27}{x} \Rightarrow \frac{x}{56} = \frac{27}{243}$. Затем умножить обе части равенства на первый знаменатель. Тогда $x = 56 \cdot \frac{27}{243} = \frac{56}{9}$.

Задача № 301. Решите уравнения:

(а) $\frac{x}{4} = \frac{11}{20}$;	(г) $\frac{37}{35} = \frac{7}{x}$;	(ж) $\frac{42}{x} = \frac{30}{75}$;	(к) $\frac{65}{39} = \frac{x}{42}$;
(б) $\frac{x}{19} = \frac{45}{38}$;	(д) $\frac{64}{55} = \frac{78}{x}$;	(з) $\frac{74}{x} = \frac{89}{100}$;	(л) $\frac{72}{51} = \frac{x}{85}$;
(в) $\frac{x}{16} = \frac{17}{24}$;	(е) $\frac{44}{15} = \frac{11}{x}$;	(и) $\frac{27}{x} = \frac{81}{26}$;	(м) $\frac{101}{93} = \frac{x}{62}$.

3) *Производные пропорции.* Пропорции, получающиеся при некоторых преобразованиях из исходной, называются производными пропорциями.

Пример № 160. (а) Сумма членов первого отношения относится к его последующему члену, как сумма членов второго отношения относится к его последующему члену:
$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

(б) Разность членов первого отношения относится к его последующему члену, как разность членов второго отношения относится к его последующему члену:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

(в) Сумма членов первого отношения относится к его предыдущему члену, как сумма членов второго отношения относится к его предыдущему члену:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}.$$

(г) Разность членов первого отношения относится к его предыдущему члену, как разность членов второго отношения относится к его предыдущему члену:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}.$$

(д) Сумма членов первого отношения относится к их разности, как сумма членов второго отношения относится к их разности:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Способ получения производных пропорций. Запишем пропорцию в виде специальной таблицы (которая называется квадратной матрицей), изъяв знаки «равенство» и «дробная черта» и заключив всё в круглые скобки, т. е.:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

С помощью квадратных матриц удобно задавать правила преобразования пропорций (т. е. правила получения производных пропорций). При этом изъятые знаки «равенство» и «дробная черта» в матрице присутствуют мысленно. Их можно всегда дописать в тех же позициях, откуда их временно изъяли.

Числа a, b, c, d называются элементами матрицы, пара чисел (a, c) называется первой строкой, другая пара чисел (b, d) называется второй строкой. Кроме того, пары a, b и c, d образуют первый и второй столбцы, соответственно.

Производные пропорции получаются при помощи умножения на вспомогательную матрицу. Элементы этой матрицы обозначим через m, n, k и l:

$$\begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix}$$

Умножаются две матрицы по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma+nb & mc+nd \\ ka+lb & kc+ld \end{pmatrix}$$

Чтобы получить элемент произведения матриц, стоящий в первой строке и первом столбце, нужно попарно перемножить элементы первой строки первого сомножителя и первого столбца второго сомножителя и полученные произведения сложить. Для элемента первой строки второго столбца надо проделать те же операции с первой строкой первого сомножителя и вторым столбцом второго сомножителя; вторая строка получается аналогично, но у первого сомножителя берется вторая строка, а у второго сначала первый столбец, потом второй.
Затем переходим обратно к пропорции:

$$\begin{pmatrix} ma+nb & mc+nd \\ ka+lb & kc+ld \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{ma+nb}{ka+lb} = \frac{mc+nd}{kc+ld}$$

Чтобы получить корректную пропорцию, для вспомогательной матрицы должно выполняться соотношение:

$$m \cdot l \neq n \cdot k$$

Пример № 161. Получим таким способом пропорции из предыдущего примера.

(а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

(б)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b & d \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

(в)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a & c \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

(г)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a & c \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

(д)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a-b & c-d \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Примечание. Числа m, n, k и l не обязательно должны быть $0, 1$ или -1. Они могут быть выбраны произвольно, но с учетом указанного выше неравенства.

Задача № 302. Получите производные пропорции от $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, используя следующие вспомогательные матрицы:

(а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (д) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (ж) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (г) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (е) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ (з) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Для получения производных пропорций мы пользовались умножением на матрицу, причем вспомогательную матрицу мы писали слева, т. е. умножали исходную матрицу на вспомогательную слева. Но можно исходную матрицу умножить и справа. При этом умножение производится по тем же правилам, с учетом изменения порядка матриц:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am + ck & an + cl \\ bm + dk & bn + dl \end{pmatrix}$$

Умножение на матрицу справа эквивалентно умножению слева на измененную вспомогательную матрицу (получающуюся перестановкой элементов n и k) и двум операциям перестановки средних членов:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \longrightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \begin{pmatrix} m & k \\ n & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma + kc & mb + kd \\ na + lc & nb + ld \end{pmatrix} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \frac{ma + kc}{na + lc} = \frac{mb + kd}{nb + ld} \quad \longrightarrow \quad \frac{ma + kc}{mb + kd} = \frac{na + lc}{nb + ld}$$

4) *Свойство равных отношений.*

Пусть даны несколько равных отношений: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$. Тогда

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Если несколько отношений равны друг другу, то сумма всех предыдущих их членов относится к сумме всех последующих членов, как какой-нибудь предыдущий член относится к своему последующему.

Задача № 303. Пусть $ad = bc$; откуда $a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$, $d = \frac{bc}{a}$. Вычислите x.

1) $2 \cdot x = 4 \cdot 10$; 4) $x \cdot 7 = 12 \cdot 21$; 7) $x \cdot 3 = 12 \cdot 21$; 10) $x \cdot 7 = 8 \cdot 28$.
2) $x \cdot 3 = 2 \cdot 6$; 5) $4 \cdot x = 12 \cdot 21$; 8) $6 \cdot 7 = x \cdot 21$;
3) $4 \cdot 7 = x \cdot 21$; 6) $4 \cdot x = 8 \cdot 21$; 9) $4 \cdot x = 12 \cdot 9$;

9.16 Элементарные преобразования пропорций

Считаем, что $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, b, c, d \neq 0$.

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ (коэффициент пропорциональности) $\Leftrightarrow$ $ad = bc$.
2) $\begin{cases} a = bk \\ c = dk \end{cases}$
3) $a = \frac{c}{d} \cdot b$; $c = \frac{a}{b} \cdot d$; $b = \frac{ad}{c}$; $d = \frac{bc}{a}$.
4) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1 \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.
5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.
6) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \pm 1 = \frac{d}{c} \pm 1 \Leftrightarrow \frac{b \pm a}{a} = \frac{d \pm c}{c}$.
7) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
8) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} = l$ (коэффициент пропорциональности).
9) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = m$ (коэффициент пропорциональности).

9.17 Решение неравенств

Задача № 304. Вычислите и определите верно ли неравенство:
1) $1 + 5 < \frac{1}{7} + \frac{5}{8}$;
2) $(2 \cdot 3) - 4 > \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{18}\right)$;
3) $\left[(982 - 111) : 3 + \frac{2-22}{9}\right] \cdot (7 - 3) > (7 - 2) \cdot 0$.

Задача № 305. Определите где верное числовое неравенство, а где нет:
1) $1 + 5 \cdot 3 > \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{5}{8}$; 2) $(6 \cdot 5) - 5 > \left(\frac{6}{4} - \frac{23}{56} \cdot \frac{1}{19}\right)$;

Скобки в числовых (и алгебраических) выражениях задают порядок действий. Сравните порядок выполнения действий в примерах и результат вычислений числовых выражений:

Пример № 162. Пример числовых выражений со скобками и без скобок. Проверьте правильность записи:

$$6 - 1 + 5 \cdot 3 > 15; \quad (1 + 5 + 8) \cdot 4 > 21;$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} : \frac{7}{3} < \frac{1}{34}; \quad \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right) : \frac{21}{3} > \frac{18}{96}.$$

Задача № 306. Верны или неверны следующие неравенства:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-2>\frac{1}{8}$;
2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-7>\frac{1}{3}-3\frac{7}{9}$;
3) $\frac{4}{3}+\frac{1}{6}>\frac{3}{12}$;
4) $2\cdot 6+5\cdot 7>\frac{1}{2}$;
5) $34\cdot 9-\frac{34}{64}>56\cdot 12+2\frac{3}{6}$;
6) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}>\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{1000}$;
7) $\frac{34}{122}+\frac{56}{256}\cdot\frac{45}{65}>1$;
8) $0>\frac{1}{2}+\frac{10}{100}+\frac{1000}{100}$;
9) $34-45\cdot 3-347>1235\cdot\frac{126}{876}$;
10) $45\cdot 98-\frac{24}{48}>\frac{3^3}{2^4}$;
11) $1+5\cdot 3\cdot 11>\frac{1}{7\cdot 2}+\frac{3}{4}$;
12) $(6\cdot 5)-5-111>-34\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\right)$.

Задача № 307. Пусть дано $2a>3b+6$. Что можно сказать о числах 1) a и $\frac{3b}{2}+3$; 2) $\frac{2a}{3}$ и $b+1$?

Задача № 308. 1) Докажите, что $4>0{,}1$, если известно, что $-0{,}25>-10$; 2) Докажите, что $5>3\frac{1}{2}$, если известно, что $0{,}2<0{,}25$.

Задача № 309. Пусть известно, что $a>b$. Сравните числа: 1) $a+6$ и $b-2$; 2) $3a-4$ и $2b+a-10$; 3) $b-a+3$ и 6.

Задача № 310. Пусть $x>y>1$. Расставьте знаки в следующих выражениях: 1) $2x...x+y$; 2) $\frac{3x+y}{4}...\frac{2y+2}{4}$; 3) $\frac{x+4}{7}...\frac{2x+3y}{6}$; 4) $-\frac{x^3+1}{2}...-\frac{x\cdot y}{3}$.

Задача № 311. Выполните допустимые операции над левой и правой частью числового неравенства (деление на -2, возведение в куб и взятие обратных чисел): 1) $6+8\geqslant 10$; 2) $3\cdot 4\leqslant 14$; 3) $4+5+7>10-1$; 4) $(2\cdot 5)-4>12:4$